

## THESIS / THÈSE

### DOCTEUR EN SCIENCES

#### Dynamique des satellites d'Uranus

Verheylewegen, Emilie

*Award date:*  
2014

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.







UNIVERSITÉ DE NAMUR

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

# Dynamique des satellites d'Uranus

Thèse présentée par  
**Emilie Verheylewegen,**  
Aspirante FNRS,  
pour l'obtention du grade  
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Timoteo CARLETTI (Président du Jury)

Rudolf DVORAK

Anne LEMAÎTRE (Promoteur)

Benoît NOYELLES

Bruno SICARDY

Alain VIENNE

Avril 2014



©Presses universitaires de Namur & Emilie Verheylewegen  
Rempart de la Vierge, 13  
B-5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,  
hors des limites restrictives prévues par la loi,  
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,  
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037-846-5  
Dépôt légal : D / 2014 / 1881 / 36

Université de Namur  
Faculté des Sciences  
rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur (Belgique)

## **Dynamique des satellites d'Uranus** **par Emilie Verheylewegen**

**Résumé :** Uranus et son système complexe et inattendu de lunes constituent encore de nos jours un mystère du système solaire. Cette thèse s'inscrit dans la compréhension de la dynamique de ces satellites naturels et aborde la question de leurs évolutions, orbitales et internes, futures ou passées. Les mouvements de ces corps sont fortement perturbés par des effets de résonances orbitales; en particulier, la résonance 3 : 1 intervient à plusieurs endroits du système uranien et constitue une clé du problème. Dans cette thèse, un modèle de résonance analytique (tronqué et moyenné) est proposé, basé sur le problème restreint des 3 corps; il est comparé avec un modèle numérique complet (N corps) et non moyenné. Ces modèles sont appliqués à la paire de satellites Cressida et Desdémone, tous deux en quasi résonance 3 : 1 avec Miranda. Couplé avec les effets de marées et l'aplatissement de la planète, ce modèle propose, pour la première fois, un scénario d'évolution des deux satellites, compatible avec les observations actuelles. La même résonance intervient entre les lunes Miranda et Umbriel; Miranda est caractérisée par une surprenante haute inclinaison, expliquée dans les années 90 par la capture temporaire (dans le passé) dans une résonance secondaire. Les résultats de cette thèse, basés sur des méthodes récentes de détection du chaos, d'intégration numérique et d'analyse en fréquences, ont globalement confirmé cette explication, tout en la nuancant et en la complétant. Toujours pour Miranda, une approche plus interdisciplinaire est également développée, où l'évolution orbitale est couplée pour la première fois à l'évolution interne (thermique), avec des résultats prometteurs.

## **Dynamics of the Uranian satellites** **by Emilie Verheylewegen**

**Abstract :** Uranus and its complex and unexpected system of moons are still today a mystery of the solar system. This thesis focuses on the dynamics of these natural satellites, and discusses their orbital and internal evolutions, in the future as in the past. These motions are strongly perturbed by the orbital mean motion resonances; in particular, the 3 : 1 resonance is present at several places in the Uranian system and is one of the keys to understand its complexity. In this work, a model of resonance (truncated and averaged) is proposed, based on the restricted 3-body problem; it is compared with a numerical full N-body model. Those models are applied to the satellites Cressida and Desdemona, both close to the 3 : 1 resonance with Miranda. Coupled with the tidal and oblateness effects, they propose, for the first time, a dynamical scenario for the two satellites, in agreement with the present observations. The same resonance appears between the huge moons Miranda and Umbriel; Miranda is characterized by a surprising high inclination, explained by several authors in the nineties, by a past temporary capture in a secondary resonance. The results of this thesis, based on recent methods of chaos detection, numerical integration and frequency analysis, have confirmed, nuanced and completed this explanation. Again for Miranda, an innovative interdisciplinary approach is developed, which couples the orbital and thermal evolutions and gives promising results.

Thèse de doctorat en Sciences mathématiques (Ph.D. thesis in Mathematics)

Date : 04/04/2014

Département de Mathématique

Promoteur (Advisor) : Prof. A. LEMAÎTRE



---

## Remerciements

---

*La reconnaissance est la mémoire du cœur*  
*H. C. Andersen*

S'il y a une étape dans ma thèse que je n'aurais manquée pour rien au monde, c'est bien la phase des remerciements envers toutes ces personnes que j'ai côtoyées et/ou qui m'ont aidée à l'aboutissement de ce projet de thèse.

Je remercie l'Université de Namur pour le cadre de travail agréable qu'elle m'a fourni ainsi que pour avoir pu bénéficier d'une bourse de fin de thèse me permettant de terminer mon travail dans de bonnes conditions. Merci également au FNRS pour le financement d'aspirant octroyé amenant le soutien financier nécessaire à la concrétisation de mon projet de thèse. Je lui suis également reconnaissante d'avoir soutenu mes déplacements à l'étranger et participations aux colloques internationaux.

Merci à mon promoteur Anne Lemaître. Merci à toi, Anne, pour ton soutien durant toutes ces années. Que ce soit pour décrocher un financement, pour élaborer un projet, pour avancer dans la recherche scientifique, pour partager une difficulté ou une joie de la vie, etc. : tu as toujours été là ! Et ce, avec cet enthousiasme et cette énergie positive qui te caractérisent et qui font que c'est tellement plaisant de travailler avec toi ! Merci pour ton investissement à tous points de vue dans mon projet de thèse.

« *En espérant que nous ferons du bon travail ensemble* », tels furent tes mots de dédicace de thèse pour moi. Je pense que le pari est tenu. Alors toute ma reconnaissance à toi, Benoît Noyelles. Merci pour le soutien apporté, pour nos séances de questions (moi)-réponses (toi) que tu n'as jamais fuies, pour ton amour de « la bonne » orthographe, pour m'avoir emmenée lors des séminaires Encelade, etc. En résumé, merci pour ta passion dans ton travail et ta patience lors de sa transmission.

Merci aux membres de mon comité d'accompagnement. Merci à Alain Vienne pour avoir toujours pris le temps de t'intéresser à mes avancées et d'en discuter avec moi lors de tes différents passages à Namur. Merci à Timoteo Carletti : ta porte est toujours ouverte et tu es toujours prêt à te pencher sur une question scientifique. Je remercie également les autres membres de mon jury, Rudolf Dvorak et Bruno Sicardy. Merci donc à l'ensemble du jury pour le temps consacré à la lecture et à l'amélioration de mon manuscrit. Vos commentaires et questions lors de la défense privée ont réellement été bénéfiques et ont amélioré la qualité du résultat final.

Merci à Özgür Karatekin pour notre collaboration sur le modèle couplé. J'ai apprécié cette approche scientifique plus interdisciplinaire. J'ai également apprécié mes visites à l'Observatoire où tu m'as toujours bien accueillie, parfois avec un peu de retard, mais à chaque fois autour d'un café et d'un chocolat. Par la même occasion, je remercie le groupe Encelade pour son accueil chaleureux et ses séminaires plein d'intérêts.

Merci aux membres du département pour cette ambiance presque familiale qui règne tout au long de l'année. En particulier, merci à toi, Annick Sarte-naer, pour ton intérêt et tes encouragements, et à toi, André Füzfa pour ta disponibilité infaillible quand il s'agit de parler sciences. Merci à vous, Pascale et Martine pour vos nombreux coups de pouce et vos solutions apportées aux petits soucis quotidiens. En parlant de petits soucis (presque) quotidiens, merci aux génies de l'informatique, Eric Cornelis et Frédéric Wautelet pour vos nombreux dépannages.

Nous avons démarré ensemble, tu as eu fini un peu plus vite : merci à toi, Charles, pour tout ce que nous avons partagé lors de nos études et pendant les années de thèse. Merci pour ton écran qui m'aura accompagnée pour la rédaction (je dois dire que ce n'était pas du luxe!). Nous avons démarré ensemble, tu as presque fini : merci à Jérémy D. pour toutes ces années en ta compagnie (si je compte bien ça doit faire 12 ans), pour ta dérision et ton humour lors de tes passages dans le bureau des filles. Pour les moments de détente (et de papotes), vous étiez là ! : merci à Charlotte, Audrey, Delphine, Eve-Aline, Anne-Sophie C., Anne-Sophie L. et Céline. Merci également à toi Jehan, pour ta disponibilité en cas de besoin et pour avoir supporté avec le sourire nos petites histoires de filles dans ton bureau. Un remerciement de plus à toi, Audrey, pour

ton enthousiasme à la « superwoman » pendant notre période de rédaction de thèse : il laissait penser que tout était possible ! Je n'oublie pas les anciens et en particulier, merci à Charlotte B., Nicolas D., Julien D. et Sandrine D. Merci pour cette intégration conviviale et rapide à mon arrivée dans « l'équipe ».

Pour cette chance d'avoir pu partager tous ces moments pendant plus de 4 ans, un grand merci à toi, Charlotte ! Je garderai en souvenir ta bonne humeur inébranlable et ton sourire associé, ton tempérament constamment au beau fixe, ta façon de faire comprendre la fin de la récré et qu'il est temps de travailler. Mais également, je retiendrai ce « petit » désordre qui a caractérisé notre bureau (et tous les cadavres associés), l'emballement conjoint à préparer le rallye math, ta compréhension lors de moments difficiles et tes explosions de joie pour les bonnes nouvelles. Je regretterai mon rayon de soleil journalier !

Merci à vous, Marie-Joëlle et Manon, pour avoir passé vos vacances de Noël à corriger, remanier, détricoter et décortiquer, etc... les nombreuses phrases de mon manuscrit de matheuse afin d'augmenter grandement sa qualité. Merci à Bon Papa Marcel pour ton intérêt permanent dans mon travail.

Merci à vous, Papa, Maman, pour avoir contribué à ma réussite par vos encouragements, votre soutien sans faille. Votre foi en moi a été un moteur tout au long de mes études et de cette thèse. Merci à toi, Nico, pour ton amour invétéré des mathématiques qui fait que nous nous retrouvons plutôt sur d'autres sujets (mais je ne désespère pas). Merci à Bonne Maman qui n'aura pu partager ce moment avec moi mais dont la fierté restera pour toujours un souvenir gravé.

Et enfin, « *last but not least* », merci à vous mes amours pour cette bonne humeur ambiante à la maison. Merci à toi, Gaspard pour tes « Souris Maman, souris ! » Merci à toi, Quentin, pour ta philosophie de vie si douce, si agréable. Merci pour cet amour et cette tendresse partagés : tu restes et resteras mon ami, mon confident, mon supporter, mon conseiller, le meilleur des compagnons de route.

*Emilie*



---

## Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Tour d'horizon du système uranien</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte et motivation . . . . .	1
1.2	Résonance en moyen mouvement 3 : 1 . . . . .	3
1.3	Plan de thèse et contributions . . . . .	6
1.4	Outils numériques . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Boîte à outils</b>	<b>9</b>
2.1	Éphémérides . . . . .	10
2.2	Problème des N corps . . . . .	11
2.2.1	2 corps . . . . .	11
2.2.2	N corps . . . . .	12
2.2.3	Déformation des corps non-ponctuels . . . . .	13
2.2.4	Effet de marée sur les éléments orbitaux . . . . .	16
2.2.5	Introduction de l'aplatissement . . . . .	17
2.2.6	Modèle complet . . . . .	20
2.3	Intégrateur Adams-Bashforth-Moulton . . . . .	20
2.4	Logiciel SWIFT . . . . .	20
2.5	Comparaisons . . . . .	21
2.5.1	Ephémérides versus N corps . . . . .	21
2.5.2	SWIFT versus N corps . . . . .	23
2.6	Résumé des points importants . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Résonance 3 : 1 Cressida-Miranda</b>	<b>27</b>
3.1	Modèle . . . . .	29
3.1.1	Problème à 2 corps . . . . .	29
3.1.2	Perturbation du troisième corps . . . . .	31
3.1.3	Hamiltonien résonant . . . . .	33



3.1.4	Cas circulaire incliné . . . . .	34
3.1.5	Cas excentrique plan . . . . .	38
3.2	Hamiltonien résonant sans dimension . . . . .	39
3.2.1	Fréquence de libration . . . . .	39
3.2.2	Dissipation . . . . .	40
3.3	Résonance interne 3 : 1 avec Miranda : Cressida ou Desdémone . . . . .	42
3.3.1	Modèle <b>ARTBP<sub>J<sub>2</sub></sub></b> appliqué à Miranda . . . . .	42
3.3.2	Localisation des résonances . . . . .	43
3.4	Simulations 3 corps . . . . .	46
3.5	Cas dissipatif de marée . . . . .	47
3.6	Conclusions et perspectives . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Résonance 3 : 1 Miranda-Umbriel</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1	Stabilité . . . . .	54
4.1.1	Indicateur variationnel : MEGNO . . . . .	55
4.1.2	Échelles orbitales . . . . .	57
4.1.3	Indicateur spectral . . . . .	58
4.1.4	Application à la résonance <b>3 : 1</b> . . . . .	59
4.2	Modèle moyenné . . . . .	63
4.2.1	Modèle incliné . . . . .	66
4.2.2	Application à la résonance <b>3 : 1</b> . . . . .	69
4.3	Évolution à l'intérieur de la résonance . . . . .	71
4.3.1	Suivi d'une trajectoire du système dissipatif . . . . .	73
4.3.2	Évolution globale via espaces de phase . . . . .	76
4.3.3	Zones de résonances secondaires . . . . .	79
4.4	Conclusions et perspectives . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Approche couplée</b> . . . . .	<b>87</b>
5.1	Module thermique . . . . .	89
5.1.1	Refroidissement . . . . .	90
5.1.2	Sources de chaleur . . . . .	97
5.1.3	Modèles rhéologiques . . . . .	101
5.1.4	Paramètres thermiques physiques . . . . .	105
5.1.5	Paramètres des marées . . . . .	107
5.2	Module dynamique . . . . .	108
5.2.1	Équations du mouvement . . . . .	110
5.3	Couplage thermodynamique . . . . .	111
5.3.1	Procédure . . . . .	111
5.3.2	Résultats . . . . .	115
5.4	Conclusions et perspectives . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives générales</b> . . . . .	<b>127</b>
	<b>Annexes</b> . . . . .	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Notations</b> . . . . .	<b>131</b>

<b>B Conditions initiales</b>	<b>133</b>
<b>C Éléments kepleriens</b>	<b>135</b>
<b>D Éphémérides de Cressida</b>	<b>137</b>
<b>E Validation MEGNO</b>	<b>141</b>
E.1 Validation sur un système à 3 planètes . . . . .	141
E.2 Validation NIMASTEP . . . . .	142
E.2.1 Application au système uranien . . . . .	143
<b>F Modèle excentrique</b>	<b>147</b>
<b>G Validation chauffage radiogénique</b>	<b>151</b>
<b>H Hamiltonian formulation of the variable mass problem</b>	<b>153</b>
H.1 Introduction . . . . .	153
H.2 The time-dependent Hamiltonian . . . . .	154
H.2.1 The initial model . . . . .	154
H.2.2 Delaunay's formulation . . . . .	155
H.3 The case $n = 3$ . . . . .	157
H.4 The perturbation theory . . . . .	159
H.4.1 Dynamics of $\mathcal{K}_0$ . . . . .	159
H.4.2 Averaging process . . . . .	161
H.4.3 Comparisons . . . . .	162
H.5 Conclusions . . . . .	162
<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>



---

## Tour d’horizon du système uranien

---

### 1.1 Contexte et motivation

Uranus et le système qui l’entoure constituent encore de nos jours un mystère de notre système solaire. Depuis la découverte de la planète par Herschel W. en 1781, un seul survol par la sonde *Voyager 2* en janvier 1986 a été effectué. Cette approche a permis l’obtention d’informations cruciales sur le système mais a également apporté son lot de zones d’ombre, laissant ledit système encore énigmatique aujourd’hui. Depuis lors, de nouvelles découvertes, associées notamment à l’utilisation du télescope spatial *Hubble*, permettent des avancées dans la connaissance du système mais certains points noirs persistent. Selon la proposition de mission *Uranus Pathfinder* [Arridge *et al.*, 2012], ces points se regroupent en 3 grandes familles (cf. Figure 1.1) résumées par :

- La géante de glace : Uranus,
- Le système associé à une géante de glace (système d’anneaux, satellites naturels),
- La magnétosphère asymétrique.

Cette thèse s’associe au deuxième objectif déterminé par Arridge *et al.* [2012] et aborde la question des évolutions orbitales et internes des satellites d’Uranus. La motivation découle de ce regain d’intérêt pour Uranus et son système. En effet, longtemps cette planète fut un peu oubliée, considérée comme une « petite sœur » des géantes gazeuses, Jupiter et Saturne. Désormais, son statut reconnu de géante de glace et la découverte de planètes extrasolaires semblables à ce type de planète relancent la communauté scientifique vers une

exploration plus approfondie du système uranien.

Malgré ce nouvel engouement, le projet d'une mission vers Uranus n'a pas été retenu par l'*Agence Spatiale Européenne*<sup>1</sup>. Le comité de sélection scientifique souligne cependant la grande qualité scientifique du projet notamment par son interdisciplinarité et encourage les coopérations avec les agences spatiales partenaires qui financeraient une mission vers Uranus qu'il juge de première importance.

Ce système est composé de 27 satellites naturels, dont les noms sont tous tirés d'œuvres de William Shakespeare et d'Alexander Pope, et d'un système de 13 anneaux principaux. Ceux-ci sont fortement liés aux 13 lunes intérieures connues (cf. Figure 1.2 à gauche) se situant toutes à l'intérieur de l'orbite du satellite principal le plus proche, Miranda. Les satellites intérieurs présentent des configurations dynamiques intéressantes, qu'on suppose fortement influencées par les satellites réguliers. En particulier, le système intérieur semble soumis à des changements dynamiques de grande ampleur et ce, sur de courtes échelles de temps.

Les satellites réguliers ou principaux dont il est question sont au nombre de 5 à savoir, du plus proche au plus lointain par rapport à Uranus : Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron. Ils sont de taille similaire aux lunes de taille moyenne de Saturne mais sont caractérisés par des densités plus importantes. Le plus intrigant de ces satellites est sans nul doute le plus petit, Miranda (cf. Figure 1.2 à droite). En effet, découverte par Kuiper, G. en 1948, cette lune présente une densité élevée et une surface semblant être recomposée de morceaux issus de nombreuses fragmentations.

Les structures observées à la surface de Miranda pourraient être le résultat de son histoire dynamique : en effet, soumis à l'effet dissipatif de marée, le système peut traverser des zones de résonances se traduisant par des changements dans les éléments orbitaux des satellites qui le composent. Ces variations entraînent des frictions entre les couches de matériaux des satellites conduisant à des modifications internes des corps visibles à leur surface. La surface de Miranda serait dès lors peut-être issue de sa différenciation interne.

Bien qu'aucune configuration résonante ne soit de mise actuellement, certains couples de satellites (Cressida-Miranda, Ariel-Umbriel, Miranda-Umbriel, etc.) sont proches de zones de résonances en moyen mouvement. Les structures en surface de Miranda, associées à une grande inclinaison de son orbite, sont probablement les signes d'une capture passée pour ces couples de satellites dans une de ses résonances.

---

1. cf. Rapport final de l'ESA sur le site de l'agence spatiale Européenne <http://sci.esa.int/cosmic-vision/53261-report-on-science-themes-for-the-l2-and-l3-missions/>.

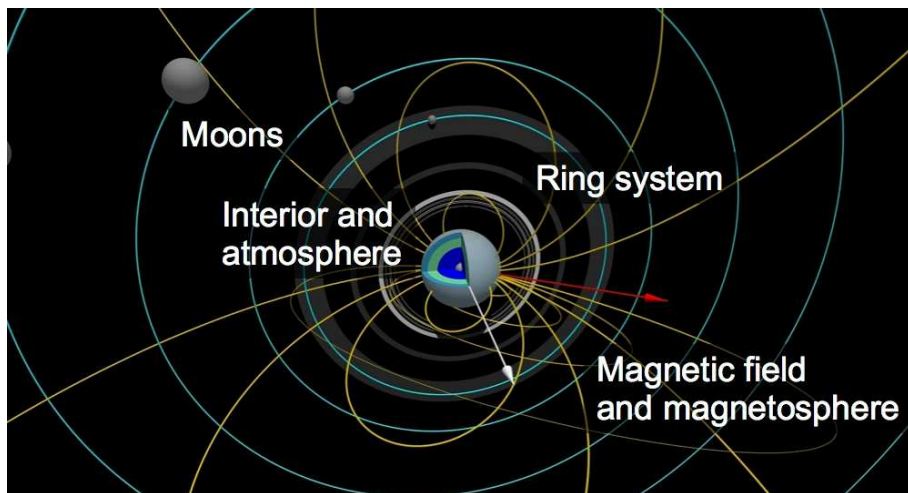


FIGURE 1.1 – Illustration des objectifs scientifiques de la mission *Uranus Pathfinder* : les satellites naturels, le système complexe d’anneaux, le champ magnétique hautement asymétrique et la magnétosphère, l’atmosphère et l’intérieur. La flèche blanche indique l’axe de rotation d’Uranus et la flèche rouge indique l’axe du dipôle magnétique. Les orbites des 5 satellites principaux sont représentées en bleu et les lignes du champ magnétique en jaune. Crédit : *Chris Arridge/UCL/UP Consortium*.

## 1.2 Résonance en moyen mouvement 3 : 1

Une résonance en moyen mouvement<sup>2</sup> est une résonance entre deux angles périodiques rapides  $\lambda$  et  $\lambda'$ , dont les fréquences associées sont données par leurs moyens mouvements  $n$  et  $n'$  respectivement. Les angles  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont les longitudes moyennes<sup>3</sup> des deux corps en résonance, la variable primée faisant référence au satellite le plus extérieur par rapport à la planète. Cette notation est utilisée dans toute cette thèse lorsqu’elle n’entraîne aucune ambiguïté. En particulier, lorsque le problème consistera en l’étude de plus de 3 corps, les notations « indicées » seront préférées, les indices suivant l’ordre croissant par rapport à la distance au corps central.

2. La résonance en moyen mouvement étant le seul type de résonance considéré dans ce travail, le terme « résonance » pourra être utilisé pour « résonance en moyen mouvement ».

3. Les éléments orbitaux sont présentés de manière détaillée dans l’annexe C.

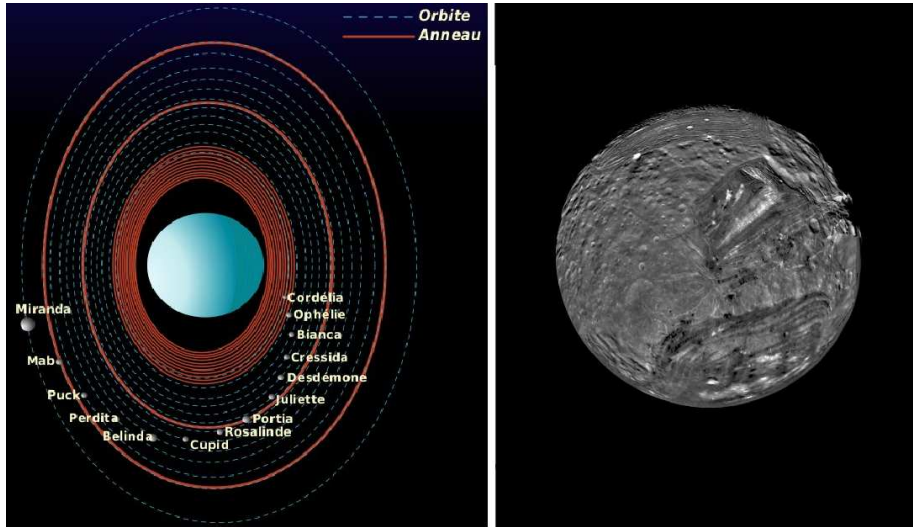


FIGURE 1.2 – Satellites d’Uranus. À gauche, le système intérieur composé des anneaux et des satellites. À droite, image de Miranda par *Voyager 2*. Crédit : NASA/JPL.

Les phénomènes de résonance, et en particulier les résonances en moyen mouvement, interviennent régulièrement dans les systèmes de satellites du système solaire. On cite par exemple la résonance de Laplace, bien connue dans le cas des satellites galiléens, Io, Europe et Ganymède, ainsi que la résonance 2 : 1 entre Encelade et Dioné pour le système de Saturne.

On dira qu’il y a résonance en moyen mouvement lorsque le rapport des moyens mouvements des deux satellites est rationnel : on parlera de *commensurabilité* entre les périodes. Soit, appliqué à la résonance 3 : 1, on observe le rapport :

$$\frac{n}{n'} = \frac{i+j}{i} = 3 ,$$

avec  $j = 2$ , l’ordre de la résonance. Dès lors dans le cas d’une résonance dite exacte, on devrait observer :

$$n - 3n' = 0 ,$$

ce qui s’avère non-valide dans notre système, cette combinaison ne tenant pas compte d’un élément essentiel du problème : les précessions des nœuds et péri-centres engendrées par l’aplatissement de la planète. Les arguments résonants

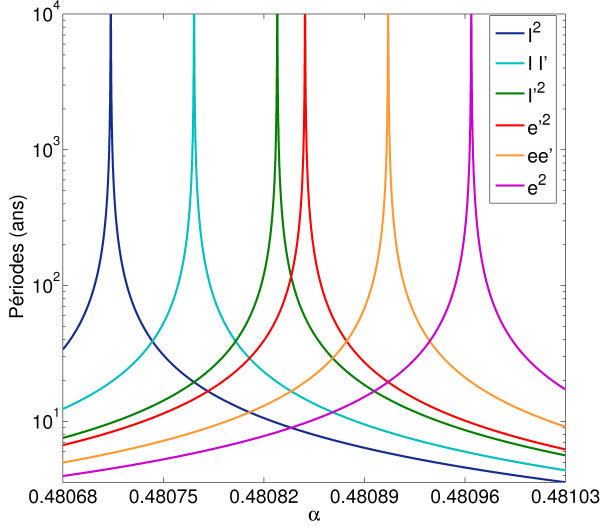


FIGURE 1.3 – Localisation des 6 combinaisons de la résonance primaire 3 : 1 considérant le rapport de demi-grands axes  $\alpha = a/a'$  en fonction des périodes des angles  $\theta_i$ . Les conditions initiales sont données dans les Tables B.1, B.2 et B.3, excepté pour le demi-grand axe  $a$  de Miranda fixé dans l'intervalle  $[127860 \text{ km} - 127960 \text{ km}]$ . L'aplatissement d'Uranus ( $J_2$ ) est considéré.

se construisent alors comme la combinaison exacte corrigée par les longitudes des nœuds et péricentres des orbites des corps considérés. Dans le cas de la résonance 3 : 1, les 6 combinaisons possibles sont :

$$\begin{array}{ll}
 \theta_1 = \lambda - 3\lambda' + 2\Omega & [I^2] \\
 \theta_2 = \lambda - 3\lambda' + \Omega + \Omega' & [II'] \\
 \theta_3 = \lambda - 3\lambda' + 2\Omega' & [I'^2] \\
 \theta_4 = \lambda - 3\lambda' + 2\varpi' & [e'^2] \\
 \theta_5 = \lambda - 3\lambda' + \varpi + \varpi' & [ee'] \\
 \theta_6 = \lambda - 3\lambda' + 2\varpi & [e^2]
 \end{array} \tag{1.1}$$

où, dans la colonne de gauche,  $\theta_i$  sont les arguments résonants pour la résonance primaire, avec  $\Omega$  et  $\Omega'$  les longitudes des nœuds ascendants et  $\varpi$  et  $\varpi'$  les longitudes des péricentres. La colonne de droite est le « type » de résonance : il correspond au premier terme non-nul associé avec le cosinus de l'angle  $\theta_i$  lors du développement du potentiel perturbateur (cf. Chapitre 4, Section 4.2).

L'effet de précession des nœuds et péricentres joue sur la localisation des résonances et tend à les écarter de la position de la résonance exacte. Dans le système uranien, l'aplatissement d'Uranus est plus faible ( $J_2 = 0.0033$ ) que dans les cas de Jupiter ( $J_2 = 0.015$ ) et de Saturne ( $J_2 = 0.016$ ) et diminue



sensiblement l'espace entre les résonances définies par les arguments (1.1) : appliquer la théorie classique de résonance isolée lorsque les excentricités ou les inclinaisons des orbites sont élevées n'a dès lors aucun sens.

La figure 1.3 localise les 6 arguments résonants (1.1) dans un plan rapport de demi-grands axes  $\alpha = a/a'$  en fonction des périodes de ces angles. On y observe la faible séparation entre ces 6 arguments résonants ainsi que l'épaisseur de chaque résonance. Ces spécificités du système seront abordées plus longuement dans un chapitre ultérieur (cf. Chapitre 4).

### 1.3 Plan de thèse et contributions

J'aurais pu détailler plus largement le système uranien : j'ai préféré me concentrer sur les objets avec lesquels j'avais travaillé dans cette thèse. Bien que les systèmes étudiés soient différents, et les sujets interdisciplinaires avec une approche d'évolution thermique, je suis heureuse de lier chaque chapitre par un aspect de mécanique céleste, la résonance en moyen mouvement 3 : 1.

Cette thèse est divisée en 4 chapitres principaux qui reprennent les résultats majeurs obtenus. J'ai choisi une introduction assez brève pour fixer le contexte et une situation plus détaillée dans une section introductive pour chacun des chapitres ultérieurs résumant notamment les travaux précédemment réalisés. De même, chaque chapitre contiendra une conclusion reprenant les résultats obtenus.

Le chapitre *Boite à outils* reprend principalement la construction des équations du mouvement du problème des N corps et la façon de le traiter numériquement lorsqu'il est soumis ou non à l'effet dissipatif de marée. Les différentes interactions gravitationnelles ainsi que l'effet de l'aplatissement de la planète y sont présentés. Dans le cadre d'un problème non-dissipatif, les solutions numériques y sont comparées aux éphémérides pour Miranda. Le problème des N corps constitue le modèle de base de tous ceux développés par la suite.

Le chapitre *Résonance 3 : 1 Cressida-Miranda*, se réfère à une analyse de la résonance 3 : 1 dans le cadre d'un problème des 3 corps restreint, appliquée au système intérieur d'Uranus. L'approche est essentiellement analytique mais une comparaison avec des simulations numériques du problème des 3 corps complet sera effectuée. Ce chapitre est basé sur la contribution suivante :

**Verheylewegen, E., Lemaitre, A., The 3 : 1 mean motion resonance between Miranda and the inner Uranian satellites, Cressida and Desdemona, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, accepted.**

Le chapitre *Résonance 3 : 1 Miranda-Umbriel* explique un scénario d'évolution menant à une grande inclinaison de Miranda par la capture dans la résonance 3 : 1 avec Umbriel. Les résultats présentés seront pour la plupart d'ordre numérique et permettront de détecter de nouvelles résonances secondaires, analysées analytiquement à l'aide d'un modèle restreint. L'ensemble des résultats a été publié dans :

**Verheylewegen, E., Noyelles, B., Lemaitre, A., A numerical exploration of Miranda's dynamical history, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435, 1776-1787, 2013.**

Le chapitre intitulé *Approche couplée* est un aspect interdisciplinaire de cette thèse par le couplage de l'aspect dynamique (i.e. orbital) présenté au chapitre précédent avec l'aspect d'évolution interne des satellites. Il sera appliqué à un problème des 3 corps complet et donne des résultats numériques. Le chapitre se base sur une publication en révision :

**Verheylewegen, E., Karatekin, Ö, Noyelles, B., Coupled orbital-thermal evolution of Miranda, *Icarus*, submitted.**

Vient ensuite un chapitre de conclusions et perspectives générales reprenant brièvement les éléments du travail.

La thèse se termine par la partie annexe. L'annexe A reprend les notations principales du texte. Les conditions initiales des simulations numériques sont reprises du site du JPL<sup>4</sup> et sont présentées dans les tableaux de l'annexe B. On y trouve également un résumé des valeurs choisies pour les paramètres thermiques de Miranda. Afin de ne pas alourdir inutilement le texte principal, les annexes suivantes présentent certains paragraphes non-essentiels à la lecture.

Enfin, n'ayant pas de relation directe avec le sujet de ce travail, la dernière annexe (cf. Annexe H) est un article soumis rendant hommage au travail de J. Hadjidemetriou sur le problème des 2 corps à masse variable :

**Lemaitre, A., Verheylewegen, E., Hamiltonian formulation of the variable mass problem. In memory of John Hadjidemetriou. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, submitted.**

On y propose une version revisitée de son approche présentée dans Hadjidemetriou [1963] utilisant le formalisme Hamiltonien et la transformation de Mathieu. Ce sujet a été retravaillé à la suite de mon mémoire de Master.

---

4. <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>

## 1.4 Outils numériques

Les résultats présentés dans cette thèse ont tous été obtenus à l'aide de codes numériques en langage Fortran90 ou C++, élaborés ou retravaillés par mes soins, excepté pour le code d'analyse en fréquences dont la conception revient à Benoît Noyelles. Les résultats graphiques utilisent le code Matlab.

Les longues simulations et les cartes utilisent le cluster PTCI de la plateforme technologique de Namur (<http://www.ptci.unamur.be>). Les ressources sont localisées à l'Université de Namur, Belgique et sont financées par le F.R.S.-FNRS. Le PTCI est un membre du Consortium des Équipements de Calcul Intensif (CÉCI) (<http://www.cec-hpc.be>).

## CHAPITRE 2

---

### Boite à outils

---

Le chapitre « Boite à outils » présente le problème des  $N$  corps et la façon générale de le traiter tout au long de ce manuscrit. De bonnes bases sont primordiales à notre étude et la définition du problème de manière générique est essentielle. Je commence donc par introduire les éphémérides des satellites d'Uranus qui en décrivent le mouvement. Ces éphémérides sont approchées en particulier par la modélisation du problème des  $N$  corps, ce modèle considérant les interactions entre chaque corps. La perturbation due à l'aplatissement de la planète est ensuite ajoutée. Dans le cadre de la déformation du corps central, les effets de marée seront présentés brièvement.

J'introduis ensuite l'intégrateur, outil permettant de résoudre numériquement le modèle. Nous verrons que le résultat obtenu contient les effets essentiels à la description de ce mouvement par comparaison avec les éphémérides présentées précédemment. Je valide ensuite l'intégrateur via le logiciel reconnu SWIFT<sup>1</sup>.

Commencer par un chapitre fixant et traitant le problème des  $N$  corps est, selon moi, opportun car ce problème est décliné sous différentes versions et intervient dans l'ensemble de la thèse.

---

1. Le logiciel SWIFT est un logiciel libre disponible à l'adresse <http://www.boulder.swri.edu/hal/swift.html>

## 2.1 Éphémérides

Les éphémérides des satellites d'Uranus sont disponibles en accès libre et aisément sur le site du Jet Propulsion Laboratory (JPL)<sup>2</sup>. La difficulté réside dans l'obtention d'informations sur les perturbations impliquées dans l'élaboration de ces éphémérides.

**Concernant les satellites principaux d'Uranus** (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron), les éphémérides ont été développées de manières analytique et numérique en parallèle, ces méthodes étant, dans chaque cas, comparées aux observations disponibles.

On cite en particulier une théorie analytique générale (GUST86 pour *General Uranus Satellite Theory*), développée par Laskar [1986] : cette théorie inclut les termes de courtes périodes ainsi que les termes séculaires et fournit une précision de l'ordre de la dizaine de km sur une échelle de temps de 12 ans. Conjointement, Jacobson, R. du JPL, développa un outil d'intégration numérique nécessaire lors de la mission spatiale *Voyager 2*. Par la suite, Laskar et Jacobson [1987] présentèrent des éphémérides semi-analytiques construites en tenant compte des observations terrestres de 1911 à 1986 ainsi que de toutes les données radios et optiques obtenues lors du passage de la sonde *Voyager 2* en 1986. Ils en déduisirent une détermination des masses des principaux satellites. Une réduction des données astrométriques fut réalisée par Jacobson [1992] estimant les orbites et les masses des satellites ainsi que la masse d'Uranus en tenant compte de l'ensemble des observations disponibles. La dernière étape a été de déterminer les orbites dans le plan de référence international (ICRF) [Jacobson, 2007].

Selon la fiche technique du site du JPL, les éphémérides des 5 satellites principaux d'Uranus construites par Jacobson R. datent de 2007 et correspondent aux données astrométriques et à celles obtenues par la mission spatiale. Elles s'étendent du 03 Janvier 1910 au 04 Janvier 2050. Ces éphémérides numériques sont développées à l'aide de polynômes de Chebychev avec une erreur interne de l'ordre de 2 m.

**Concernant les satellites intérieurs d'Uranus**, les éphémérides sont construites à l'aide d'une ellipse précessante ajustée aux observations astrométriques obtenues par le télescope spatial *Hubble* et les données d'imagerie obtenues par *Voyager 2*. Les éléments des 10 lunes découvertes par *Voyager 2* ont été fournis par Jacobson [1998], tandis que le modèle lié aux 3 lunes découvertes par la suite est attribué à Showalter et Lissauer [2006]. La grande inconnue pour l'obtention d'éphémérides plus précises est la détermination des masses des corps de ce système.

---

2. <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>

La dynamique des satellites d'Uranus sera étudiée dans le chapitre 3 pour les satellites intérieurs et dans les chapitres 4 et 5 pour les satellites principaux, dans le cadre particulier d'une résonance en moyen mouvement 3 : 1.

## 2.2 Problème des $N$ corps

Pour modéliser le mouvement des satellites d'Uranus, on développe un code d'intégration numérique des équations du mouvement du problème des  $N$  corps en coordonnées cartésiennes et planétocentrique, où  $N$  est le nombre de corps total comprenant  $N - 1$  satellites et la planète.

À moins d'être dans le cas particulier du problème keplerien ( $N = 2$ ), le problème des  $N$  corps ne dispose pas de solution analytique générale mais on peut l'étudier via des solutions approchées. On élabore alors une théorie des perturbations et on considère le problème des  $N$  corps comme  $N-1$  problèmes des 2 corps, chacun perturbé par la présence des autres corps. C'est pourquoi le formalisme Hamiltonien est utilisé dans les chapitres ultérieurs, permettant par la suite le développement d'une théorie des perturbations lors de la construction d'un Hamiltonien moyenné (cf. Chapitres 4 et 5). Dans ce chapitre-ci, par contre, seules les équations du mouvement dérivant des différents potentiels seront données en coordonnées cartésiennes afin de présenter exactement les expressions utilisées dans le code numérique.

### 2.2.1 2 corps

Construisons le problème de manière progressive en considérant d'abord le problème keplerien décrivant le mouvement d'un satellite naturel autour de son corps central sur une orbite elliptique fixe. Le corps en révolution est repéré à l'aide des éléments cartésiens  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  par rapport à la planète. Dans le cas de ce problème à 2 corps, l'équation du mouvement est donnée par :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_0 + m)}{r^3} \mathbf{r} , \quad (2.1)$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle,  $m_0$  la masse du corps central, et  $m$  celle du corps en révolution repéré par le vecteur position  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , avec  $r = \|\mathbf{r}\|$ , lui-même associé au vecteur vitesse  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  avec  $v = \|\mathbf{v}\|$ , les éléments notés en gras représentant les vecteurs dans l'ensemble de cette thèse. Le premier terme (dépendant de  $m_0$ ) de l'expression (2.1) est l'accélération d'un problème des 2 corps dans un repère inertiel. Le second terme (dépendant de  $m$ ) tient compte de l'accélération d'entraînement liée au choix d'un repère planétocentrique. L'équation (2.1) est obtenue via la seconde loi de Newton reliant la force appliquée à un corps à l'accélération subie par celui-ci, lorsque

cette force découle d'un potentiel. Dans le cas de l'interaction gravitationnelle, cette force est connue et s'écrit par unité de masse sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_0}{r^3} \mathbf{r} . \quad (2.2)$$

### 2.2.2 N corps

Ajoutons désormais un 3<sup>ème</sup>, 4<sup>ème</sup>, ..., (N-2)<sup>ème</sup> corps : l'interaction de chacun d'eux avec la planète constitue en elle-même un problème des 2 corps décrit précédemment. Indépendamment du corps central, ce problème est perturbé par l'interaction gravitationnelle intervenant entre les corps présents en orbite. Cette configuration est représentée à la figure 2.1 dans le cadre d'un problème des 3 corps.

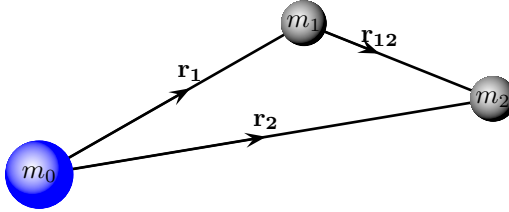


FIGURE 2.1 – Configuration du problème des N corps avec  $N = 3$ . Les masses  $m_0$ ,  $m_1$  et  $m_2$  sont respectivement celles du corps central et des deux satellites. Les vecteurs  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_{12}$  repèrent les corps entre eux.

Le potentiel par unité de masse lié à la présence des  $N - 2$  autres corps s'écrit pour chaque satellite  $i$  :

$$V_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N-1} Gm_j \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) , \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}$ , et  $\mathbf{r}_j$  est le vecteur position d'un troisième corps, avec  $r_j = \|\mathbf{r}_j\|$ . Le premier terme de la somme est un problème des 2 corps entre les satellites de masse  $m_j$  et  $m$ , le deuxième terme étant dû à l'accélération d'entraînement intervenant dans le cas d'un repère non-inertiel.

Reprenant la seconde loi de Newton et du fait que la force impliquée découle du potentiel, on écrit le terme de l'équation du mouvement dû à la présence des  $N - 2$  autres corps par :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N-1} Gm_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) , \quad (2.4)$$

où on retrouve la perturbation directe dans le premier terme et la perturbation indirecte dans le second.

### 2.2.3 Déformation des corps non-ponctuels

Jusqu'à présent, les deux sections précédentes construisent un modèle considérant des corps de masse ponctuelle. Ce qu'il advient lorsque tombe cette hypothèse est l'objet de cette section.

Quand la force gravitationnelle est appliquée à un système de corps non-ponctuels, l'effet de marée sur ces corps non-rigides produit une distorsion de ceux-ci. De manière simplifiée, lorsqu'un satellite est lié gravitationnellement à une planète, le champ de gravité n'est pas uniforme dans la planète : il varie de manière significative entre le côté de la planète qui est face au satellite et le côté le plus éloigné qui ressent une intensité moindre de la force de gravité. Ceci a pour conséquence une déformation quasiment instantanée du corps planétaire se présentant comme deux renflements dits « bourrelets de marée » ; la planète prend une forme ellipsoïdale. La déformation subie implique une dissipation d'énergie dépendante principalement des propriétés physiques de l'objet concerné : le phénomène de marée implique des frictions internes dans la planète se traduisant par une perte d'énergie totale et un décalage dans la réponse à la force perturbatrice (voir e.g. Murray et Dermott [1999]). Par le principe d'action-réaction de Newton, cet effet s'applique également au satellite de par la présence de la planète.

La rotation sur lui-même d'un corps non-ponctuel et non-rigide joue également un rôle et implique un aplatissement au niveau de ses pôles (où l'accélération est nulle) et un renflement au niveau de son équateur (où l'accélération est maximale), cette modification étant d'autant plus grande que la vitesse de rotation est élevée.

Réagissant aux contraintes externes que sont les marées et la rotation, les déformations des corps dépendent bien évidemment des intensités des forces sous-jacentes, mais pas seulement : les compositions internes et les masses des noyaux entrent également en jeu. La détermination précise de la déformation donne dès lors des indications sur la nature des corps, et en particulier de la planète.

#### Déformation due aux marées

Levons l'hypothèse du corps ponctuel sur le corps central considérée jusqu'à présent et considérons un système planétocentrique à 2 corps, dont le corps central est constitué d'une multitude d'éléments de masse  $dm$ . L'objectif est de calculer le potentiel à un point  $P$  de la surface de la planète dû à la présence



du satellite (cf. Figure 2.2). Ce point est repéré par rapport au centre de la planète à l'aide du vecteur position  $\mathbf{s}$ . Le repérage du satellite est donné par le vecteur  $\mathbf{r}$ . On notera  $\Delta = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|$ , la distance entre un point en surface de la planète et le satellite en orbite. Le potentiel gravitationnel découlant de la force (2.2), s'écrit :

$$V = -\frac{Gm_0}{\Delta}, \quad (2.5)$$

où l'inverse de la distance est développé en polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i \geq 0} \frac{R_p^i}{r^{i+1}} P_i(\cos \Psi) \quad \text{où} \quad \cos \Psi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{rs},$$

avec  $r > s$  où  $\|\mathbf{s}\| = R_p$ , le rayon de la planète. L'expression  $P_i(\cos \Psi)$  est celle du polynôme de Legendre de degré  $i$  défini par :

$$P_i(x) = \frac{1}{2^i} \frac{d^i}{i! dx^i} \left( (x^2 - 1)^i \right).$$

La force de marée découle du potentiel (2.5). Appliquée à la surface de la planète, elle déforme la planète selon un bourrelet de marée.

Comparant les périodes de révolution des satellites principaux d'Uranus, qui se situent tous au-delà de l'orbite synchrone, avec la période de rotation d'Uranus ( $\sim 17$  h), on constate une rotation asynchrone. Celle-ci, combinée au fait que la réponse à la force de marée n'est pas instantanée, implique un décalage  $\alpha$  entre la droite reliant les centres de masse des deux objets et l'axe du bourrelet de marée (cf. Figure 2.2). Il s'exerce alors un couple de marée s'opposant à la rotation du corps afin d'amener le système vers un état de synchronisation où les spins sont alignés, les orbites circularisées et les rotations synchronisées avec les moyens mouvements. Sur les éléments orbitaux, ceci se traduit par un amortissement des excentricités et des inclinaisons. La synchronisation entre la rotation du corps et son moyen mouvement implique une variation du demi-grand axe et une migration du satellite vers l'intérieur ou l'extérieur par rapport au corps central.

Le décalage dans la réponse à la perturbation est dû aux frictions internes intervenant lors de la déformation d'un corps visqueux. La conséquence de ces frictions est une dissipation d'énergie sous forme de chaleur. Le paramètre  $Q$ , mieux connu sous le nom de *fonction de dissipation*, quantifie l'énergie dissipée et est défini de manière simplifiée suivant la formule présentée notamment par Murray et Dermott [1999]<sup>3</sup> :

$$Q = \frac{2\pi E_0}{\Delta E}, \quad (2.6)$$

---

3. La fonction de dissipation peut également être quantifiée via des modèles rhéologiques tenant compte de la structure interne des corps (cf. Chapitre 5).

où  $\Delta E$  est l'énergie dissipée sur un cycle et  $E_0$  est le pic d'énergie lors de la distorsion due à la marée. Ainsi, lorsque le facteur  $Q$  est petit, le système est soumis à une forte dissipation. Dans le cas contraire, on sera en présence d'une dissipation d'énergie peu élevée. Cette définition de la fonction  $Q$  est obtenue en mettant en parallèle la réponse de la planète et d'un oscillateur harmonique forcé [Murray et Dermott, 1999].

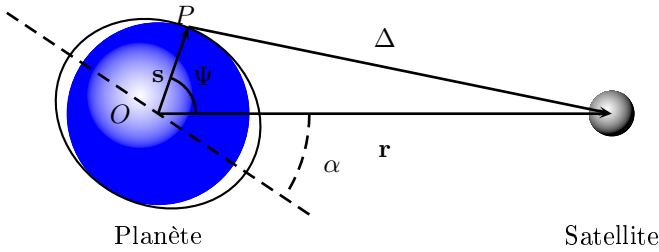


FIGURE 2.2 – Schéma représentant l'effet de marée agissant sur une planète par la présence d'un satellite. La déformation impliquée n'étant pas instantanée, la déformation causée par la marée conduit à un bourrelet de marée en décalage par rapport à la droite reliant les centres de masse.

La déformation de la planète, obtenue par application de la force découlant du potentiel de marée (2.5), a elle-même un effet sur le satellite perturbateur. Afin de pouvoir le quantifier, analysons l'effet d'un corps non-sphérique sur un corps extérieur.

Soit un point  $P'$ , élément appartenant à la surface déformée. Celui-ci peut être repéré à l'aide des coordonnées sphériques

$$P' = P'(r', \theta', \varphi') ,$$

où  $r'$  est la distance du centre de la planète au point  $P'$ ,  $\theta'$  est la colatitute et  $\varphi'$  est l'angle de la longitude. La déformation restant petite, le rayon  $r'$  se réécrit sous la forme

$$r' = R_E (1 + \mathcal{E} P_2(\cos \theta')) ,$$

où le coefficient  $\mathcal{E}$  est une constante beaucoup plus petite que l'unité et  $R_E$  est le rayon de la sphère non-déformée. La distance  $r'$  reste proche de la surface de la planète.

De manière plus précise, ce coefficient  $\mathcal{E}$  est le résultat d'un développement en harmoniques sphériques, tronqué au premier terme non nul ; il est considéré comme directement proportionnel au terme du potentiel qui crée la

déformation. Ce coefficient et les suivants (si on prend une approximation plus complète), dépendent essentiellement de la composition et de la rigidité de la planète<sup>4</sup>. Ils sont liés au nombre de Love et en particulier au nombre  $k_2$  [Murray et Dermott, 1999]. À noter que lorsque la structure interne de l'objet étudié est connue, le nombre de Love  $k_2$  peut être calculé.

Dans le cas d'un corps solide homogène de rayon  $R$ , de densité  $\rho$  et de masse  $m$ , le nombre de Love  $k_2$  est donné par [Love, 1906] :

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{19\mu}{2\rho g R} \right)^{-1} \\ &= \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{19\mu R}{2\rho Gm} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $\mu$  est la rigidité et  $g$  est la gravité à la surface. Les nombres de Love sont au nombre de 3 : ensemble, ils mesurent la sensibilité du corps à changer de forme lorsqu'il est soumis aux effets de marée.

Tout comme la fonction de dissipation  $Q$ , le nombre de Love  $k_2$  n'est pas facile à estimer. Soulignons par avance que l'évolution du système avec effets de marée dépendra fortement du ratio difficilement quantifiable  $k_2/Q$ , pour chaque corps du système.

Le potentiel de marée se développe par les polynômes de Legendre de la même manière que dans le cas de l'effet du satellite sur la planète avec l'expression du rayon  $\mathbf{r}'$  pour tenir compte de la déformation. On obtient le potentiel de marée sous la somme de deux termes, l'un étant le potentiel d'une sphère homogène et, l'autre, le potentiel extérieur dû à la déformation de la planète.

## 2.2.4 Effet de marée sur les éléments orbitaux

Comme dit précédemment, les marées tendent à amortir certains éléments orbitaux puisque l'état de synchronisation recherché par le couple de marée amène à une circularisation des orbites et la synchronisation des rotations avec les moyens mouvements, celle-ci s'opérant par modifications du demi-grand axe (recul ou éloignement du satellite). Cet effet dissipatif est modélisé via les équations de Kaula [1964].

L'effet résultant des bourrelets de marée de la planète et de sa rotation sur les satellites est décrit par la perturbation introduite via le potentiel (2.5)

---

4. On consultera Murray et Dermott [1999] pour de plus amples informations quant au développement en harmoniques sphériques lié au coefficient  $\mathcal{E}$  ainsi que le lien entre ce coefficient et le paramètre  $k_2$ .

développé en polynômes en Legendre. Ce potentiel est ré-exprimé dans les éléments elliptiques définis en annexe C. L'expression du potentiel  $V$  ainsi obtenu est développée à l'aide de séries de Fourier dont les coefficients sont ensuite développés en excentricité et en inclinaison [Kaula, 1964] et est introduite dans les équations de Laplace<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{e} \left[ \frac{1 - e^2}{a G(m_0 + m)} \right]^{1/2} \left[ (1 - e^2)^{1/2} \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\partial V}{\partial w} \right],\end{aligned}$$

pour donner une expression simplifiée, au second degré en excentricité, sous la forme d'équations séculaires supposant que les satellites sont en rotation synchrone (voir e.g. Yoder et Peale [1981]) :

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= 3 \left( \frac{k_2}{Q} \right)_p \frac{n m R_p^5}{a^4 m_0} \left( 1 + \frac{51}{4} e^2 \right) - 21 \left( \frac{k_2}{Q} \right)_s \frac{n m_0 R_s^5}{a^4 m} e^2 \\ \frac{de}{dt} &= \frac{57}{8} \left( \frac{k_2}{Q} \right)_p \frac{n m}{m_0} \left( \frac{R_p}{a} \right)^5 e - \frac{21}{2} \left( \frac{k_2}{Q} \right)_s \frac{n m_0}{m} \left( \frac{R_s}{a} \right)^5 e,\end{aligned}\tag{2.8}$$

$R_p$  étant le rayon moyen d'Uranus,  $R_s$  et  $n$  représentant le rayon et le moyen mouvement du satellite. Observons, dans ces formulations, la dépendance en  $(k_2/Q)_p$  et  $(k_2/Q)_s$ , pour la planète et le satellite respectivement. Ces paramètres sont difficilement quantifiables si on ne dispose pas d'informations sur la répartition de masse à l'intérieur des corps.

Ces deux équations comprennent chacune deux termes principaux : le premier est lié à la dissipation de la planète  $((k_2/Q)_p)$  et domine en général le deuxième terme lié à la dissipation du satellite  $((k_2/Q)_s)$ . Dans ce cas, l'évolution standard mène à un éloignement des satellites par rapport à la planète et à une circularisation des orbites. Il se peut, dans le cas de fortes dissipations à l'intérieur des satellites (cf. Chapitre 5), que le second terme devienne prédominant, forçant les satellites à revenir vers la planète.

### 2.2.5 Introduction de l'aplatissement

Introduisons désormais l'effet de l'aplatissement dans le modèle à  $N$  corps : il est nécessaire de considérer une planète non-sphérique et non-homogène pouvant être approchée par un sphéroïde aplati. Dans ce cas, on développe en harmoniques sphériques, le potentiel (2.5) et on l'écrit en coordonnées sphériques (longitude  $\lambda$ , latitude  $\Phi$ ) sous la forme complète suivante [Montenbruck

---

5. L'effet de marée sur les inclinaisons sera négligé par rapport à l'amortissement des excentricités.

et Gill, 2000] :

$$V(r, \lambda, \Phi) = -\frac{Gm_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_p}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \Phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) , \quad (2.9)$$

où  $R_p$  est le rayon moyen correspondant aux valeurs de  $J_2$  et de  $J_4$ ,  $P_{nm}$  sont les fonctions de Legendre,  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$ , les coefficients des harmoniques sphériques [Montenbruck et Gill, 2000] qui dépendent de la répartition de la masse dans le corps. Il est important de noter que, bien que la formulation mathématique du potentiel de départ (2.5) est la même dans les cas de l'étude de l'effet de marée et de l'aplatissement du corps central, elle n'a pas le même sens physique. Dans le cas dissipatif, Kaula [1964] donne le potentiel d'un corps déformé par l'effet de marée uniquement. L'approche de Montenbruck et Gill [2000] développe le potentiel d'un corps de forme quelconque sans se soucier de la cause de la déformation.

Le potentiel d'aplatissement peut être grandement simplifié dans notre problème. On note qu'au degré zéro, le potentiel se ré-exprime comme celui du problème des 2 corps. Par l'étude de Montenbruck et Gill [2000], au premier ordre, les coefficients  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$  sont nuls lorsque le système est planétocentrique. De ce fait, la série sur  $n$  démarre à 2 et le potentiel précédent s'écrit sous la forme :

$$V(r, \lambda, \Phi) = -\frac{Gm_0}{r} + \frac{Gm_0}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_p}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \Phi) J_{nm} \cos(m\lambda - m\lambda_{mn}) , \quad (2.10)$$

où, pour obtenir cette dernière expression, les relations suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} C_{nm} &= -J_{nm} \cos(m\lambda_{mn}) \\ S_{nm} &= -J_{nm} \sin(m\lambda_{mn}) , \end{aligned}$$

avec  $m\lambda_{mn} = \arctan(-S_{nm}/-C_{nm})$ , les coefficients  $J_{nm}$  étant sans dimension. Le premier terme du potentiel (2.10) est celui des 2 corps dans le cas de corps ponctuels.

La connaissance des paramètres d'aplatissement d'Uranus est assez réduite : elle se limite aux harmoniques zonales  $J_2$  et  $J_4$ . De manière imagée, ceci revient à modéliser l'aplatissement de la planète en considérant 4 parallèles et aucun méridien. Cette limitation est sans conséquence étant donné que ces paramètres sont assez petits et associés au rapport  $(R_p/r)^n$  avec  $R_p \ll r$  et  $n$  étant l'ordre de l'harmonique zonale. Comme expliqué au point précédent, l'aplatissement de la planète est lié aux effets de marée mais également à la rotation de la planète sur elle-même. On note donc le lien entre cette rotation et les coefficients  $J_n$ ,

par exemple à l'ordre 2 :

$$J_2 = \frac{2 C - A - B}{2m_0 R_p^2} ,$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les principaux moments d'inertie de la planète qui caractérisent la forme du corps et son inertie par rapport à la rotation. Notons que dans le cas des planètes gazeuses, la symétrie de révolution est de mise et  $A = B$ , simplifiant la formule ci-dessus en l'expression :

$$J_2 = \frac{C - A}{m_0 R_p^2} .$$

Sur la dynamique du système, les coefficients  $J_n$  influencent les orbites des satellites par leurs précessions dans l'espace. Le paramètre  $J_3$  étant inconnu pour Uranus, on écrira le potentiel lié à l'aplatissement (et sans reprendre le potentiel lié au problème des 2 corps) comme :

$$V(r, \Phi) = -J_2 \frac{Gm_0}{r^3} R_p^2 P_2(\sin(\Phi)) - J_4 \frac{Gm_0}{r^5} R_p^4 P_4(\sin(\Phi)) , \quad (2.11)$$

où les expressions des polynômes de Legendre au second et quatrième ordres sont données par :

$$\begin{aligned} P_2(\sin(\Phi)) &= \frac{1}{2} (3 \sin^2 \Phi - 1) \\ P_4(\sin(\Phi)) &= \frac{1}{8} (35 \sin^4 \Phi - 30 \sin^2 \Phi + 3) , \end{aligned}$$

et peuvent se ré-exprimer en coordonnées cartésiennes via les relations :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda \cos \Phi \\ y &= r \sin \lambda \cos \Phi \\ z &= r \sin \Phi . \end{aligned}$$

La force dérivant du potentiel, on écrit les équations du mouvement associées à l'aplatissement, en considérant à nouveau la seconde loi de Newton reliant la force par unité de masse à l'accélération :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{3 Gm_0 J_2 R_p^2}{2 r^7} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4z^2 \\ x^2 + y^2 - 4z^2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 2z^2 \end{pmatrix} \mathbf{r} \\ &+ \frac{15 Gm_0 J_4 R_p^4}{8 r^{11}} \begin{pmatrix} x^4 + y^4 + 8z^4 - 12z^2(x^2 + y^2) + 2x^2y^2 \\ x^4 + y^4 + 8z^4 - 12z^2(x^2 + y^2) + 2x^2y^2 \\ 5(x^4 + y^4) + \frac{8}{3}z^4 - \frac{40}{3}z^2(x^2 + y^2) + 10x^2y^2 \end{pmatrix} \mathbf{r} . \end{aligned} \quad (2.12)$$

### 2.2.6 Modèle complet

La généralisation à un système de  $N - 1$  satellites est directe. L'équation du mouvement pour chaque satellite  $i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  est donnée par la somme de l'accélération du problème des 2 corps (2.1), de celle due à la présence des  $N - 2$  autres corps (2.4) et de celle liée à l'aplatissement de la planète (2.12). L'équation résultante est celle intégrée dans le code N corps.

Les équations du mouvement sont intégrées en éléments cartésiens car ils sont toujours définis en tous temps de la simulation. La géométrie des orbites est mieux représentée via l'utilisation des éléments elliptiques ou kepleriens.

## 2.3 Intégrateur Adams-Bashforth-Moulton

L'intégrateur utilisé exclusivement dans ce travail est un intégrateur Adams-Bashforth-Moulton (ABM) de type prédicteur-correcteur d'ordre 10 basé sur des interpolations polynomiales à pas fixe. Cette méthode multipas se déroule en deux étapes :

1. dans un premier temps, initialisation de l'intégrateur à l'aide d'une méthode à pas unique de type Runge-Kutta. Ici, un ordre 5 est considéré avec un pas d'intégration dix fois plus petit que dans l'intégrateur principal.
2. dans un deuxième temps, une formule à pas multiples en disposant initialement des approximations de la solution exacte via la première étape. On procède ensuite récursivement à des approximations successives de la solution.

L'intégrateur est de type prédicteur-correcteur, i.e. qu'il prédit la solution via la méthode Adams-Bashforth explicite pour ensuite la corriger si nécessaire via la formule implicite attribuée à Adams-Moulton. Le correcteur Adams-Moulton sera utilisé tant que la solution approchée est supérieure à une erreur fixée. Cet intégrateur a l'avantage d'être plus précis (développé à l'ordre 10) tout en étant plus rapide que les méthodes classiques type Runge-Kutta. Le code a été développé suivant Hairer *et al.* [1993].

## 2.4 Logiciel SWIFT

Créé par H. Levison et M. Duncan en 1993, le logiciel SWIFT permet l'intégration numérique de systèmes composés de corps massifs interagissant gravitationnellement. On peut également y considérer un groupe de particule-tests perturbé par les corps massifs mais n'affectant pas ceux-ci, permettant notamment l'étude de rencontres proches entre planètes et petits corps.

Le logiciel dispose de 4 techniques d'intégration :

1. **Mapping Wisdom-Holman** (WHM) [Wisdom et Holman, 1991] : étude de l'évolution à long terme des problèmes des  $N$  corps disposant d'une masse centrale dominante (systèmes planétaires ou systèmes de satellites). Cette méthode d'intégration est une généralisation de la méthode « mapping » présentée par Wisdom [1982, 1983]. Elle introduit un procédé de moyennisation basé sur l'utilisation de fonctions delta [Chirikov, 1979] permettant le remplacement de termes oscillants rapides par d'autres choisis judicieusement. L'Hamiltonien du système est décomposé sous la forme « problème des 2 corps + perturbations ».
2. **Regularized Mixed Variable Symplectic** (RMVS) [Levison et Duncan, 1994] : étude des orbites de petits corps sur des échelles de temps proches de l'âge du système solaire avec gestion de rencontres proches (comètes de courtes périodes de vie  $P < 200$  ans). Cette méthode est un mixte entre les méthodes appelées *Mixed Variable Symplectic* [Saha et Tremaine, 1992] et des méthodes de régularisation [Stiefel et Scheifele, 1971] permettant le changement de coordonnées lorsqu'un corps approche le rayon de Hill d'une planète.
3. **Méthode symplectique  $T+U$  d'ordre 4** (TU4) [Candy et Rozmus, 1991] : étude de problèmes de mécanique céleste sur du long terme. L'intégrateur symplectique d'ordre 4 est basé sur une décomposition de l'Hamiltonien de type « énergie cinétique ( $T$ ) + énergie potentiel ( $U$ ) ».
4. **Méthode de Burlish-Stoer** : méthode d'intégration combinant une extrapolation de Richardson, l'utilisation d'extrapolations via des fonctions rationnelles et la méthode de point modifié. Elle a été implémentée suivant l'algorithme présenté par exemple par Press *et al.* [2007].

Le logiciel SWIFT étant à disposition, il a été utilisé uniquement dans un but de comparaison des résultats pour une validation complémentaire du code d'intégration effectué avec l'ABM.

## 2.5 Comparaisons

### 2.5.1 Ephémérides versus $N$ corps

Considérons Uranus avec ses 5 satellites principaux (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron) et procédons à la comparaison entre les éphémérides calculées par le JPL [Jacobson, 2007] et les résultats obtenus avec notre code d'évolution orbitale. On effectue des intégrations numériques de l'équation du problème des  $N$  corps (cf. Sous-section 2.2.6) avec  $N = 6$  à l'aide de l'intégrateur numérique ABM d'ordre 10 décrit à la section 2.3. Les conditions initiales du problème des 6 corps sont identiques à celles des éphémérides du JPL.



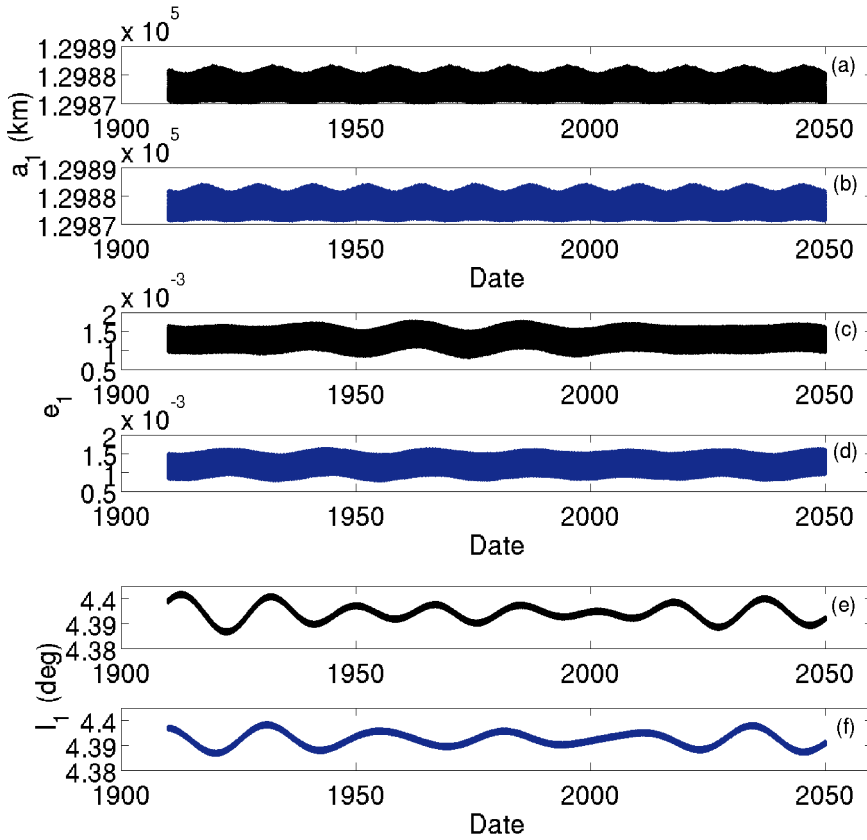


FIGURE 2.3 – Éléments orbitaux  $a_1$ ,  $e_1$  et  $I_1$  de Miranda en fonction de la date. Les figures (a),(c) et (e) sont obtenues via les éphémérides numériques du JPL. Les figures (b),(d) et (f) sont obtenues via notre intégration numérique ABM d'ordre 10.

La figure 2.3 donne les éléments orbitaux  $a_1$ ,  $e_1$  et  $I_1$  du satellite Miranda<sup>6</sup>, obtenus via les éphémérides ((a),(c),(e)) et via la simulation d'un problème des 6 corps ((b),(d),(f)) en fonction du temps. De manière plus précise, le temps est représenté par une date basée sur l'époque standard du J2000. Dans l'ensemble, notre modélisation par un problème des 6 corps est proche qualitativement des évolutions données par le JPL, malgré des données non-prises en compte dans notre modèle. On rappelle en effet que les éphémérides du JPL sont construites

6. Les mouvements de 4 autres satellites ont tous été vérifiés de manière identique. On note ici l'utilisation de la notation indexée pour éviter toute ambiguïté dans l'abord d'un problème des 6 corps, les indices allant dans un ordre croissant par rapport à leur position au corps central.

à l'aide d'un modèle ajusté aux observations. Il aurait été judicieux de tracer les différences entre les courbes. Les pas d'intégration n'étant pas exactement les mêmes, j'ai préféré calculer une différence sur la position cartésienne du satellite Miranda donnée par le JPL par rapport à la position cartésienne donnée par le code ABM. La figure 2.4 présente la déviation angulaire en fonction du temps entre les positions de Miranda données par le JPL et par le code d'intégration d'un problème des 6 corps.

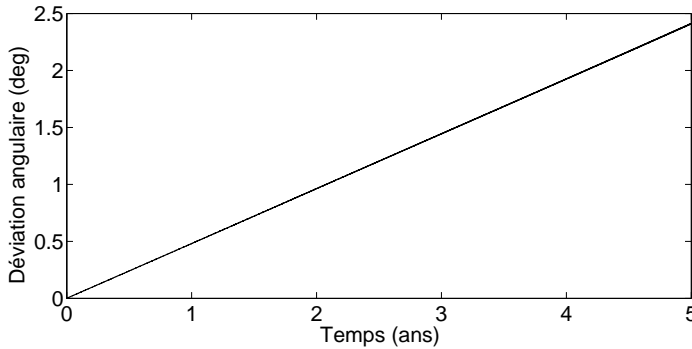


FIGURE 2.4 – Déviation angulaire (deg) en fonction du temps (ans) entre les positions de Miranda données par le JPL et par le code d'intégration du modèle à 6 corps.

La conclusion à en tirer est que les effets dominants de la dynamique d'Uranus et de ses 5 satellites principaux sont bien représentés par un modèle à 6 corps.

### 2.5.2 SWIFT versus N corps

Considérons le système à 6 corps composé d'Uranus et de ses 5 satellites principaux, et procédons à la comparaison entre deux méthodes de résolution : l'objectif est de valider l'intégrateur ABM développé par comparaison avec les sorties du logiciel SWIFT. Dans notre étude, i.e. sans rencontre proche, la méthode du WHM est choisie pour cette comparaison. Ce choix semble pertinent étant donné que l'ensemble de l'étude sur les satellites d'Uranus de Titemore et Wisdom [1988, 1989, 1990] a été réalisé avec une méthode de type WHM. Elle semble donc mieux adaptée au problème.

La figure 2.5 ((a), (b), (c)) donne les éléments orbitaux  $a_1$ ,  $e_1$  et  $I_1$  du satellite Miranda, obtenus via la simulation 6 corps en fonction du temps (en bleu) et via le logiciel SWIFT (en vert). On aurait pu tracer les différences entre les courbes mais l'objectif ici est de montrer qualitativement que le comportement

est le même. Les résultats probants de cette comparaison valident notre intégrateur, qui sera utilisé dans l'ensemble des simulations numériques de cette thèse.

## 2.6 Résumé des points importants

Le problème des  $N$  corps a été introduit fournissant la base de travail pour l'étude de la dynamique dans cette thèse. Le problème présenté tient compte des effets gravitationnels entre les corps, de l'effet de l'aplatissement de la planète ( $J_2$  et  $J_4$ ) et considère l'effet dissipatif des marées sur les demi-grands axes et les excentricités.

Les équations du mouvement associées sont présentées sous leur forme cartésienne afin de se rapprocher du code numérique implémenté. Ce code utilise un intégrateur Adams-Bashforth-Moulton d'ordre 10 initialisé par un intégrateur de type Runge-Kutta d'ordre 5. Dans le cas des satellites principaux d'Uranus, l'évolution des éléments orbitaux obtenue a été comparée avec succès aux éphémérides du JPL. Une vérification supplémentaire a été réalisée par comparaison des sorties de notre logiciel avec celles du logiciel SWIFT, validant ainsi le cadre de travail de cette thèse.

Ces outils présentés seront dès lors utilisés tout au long des chapitres ultérieurs.

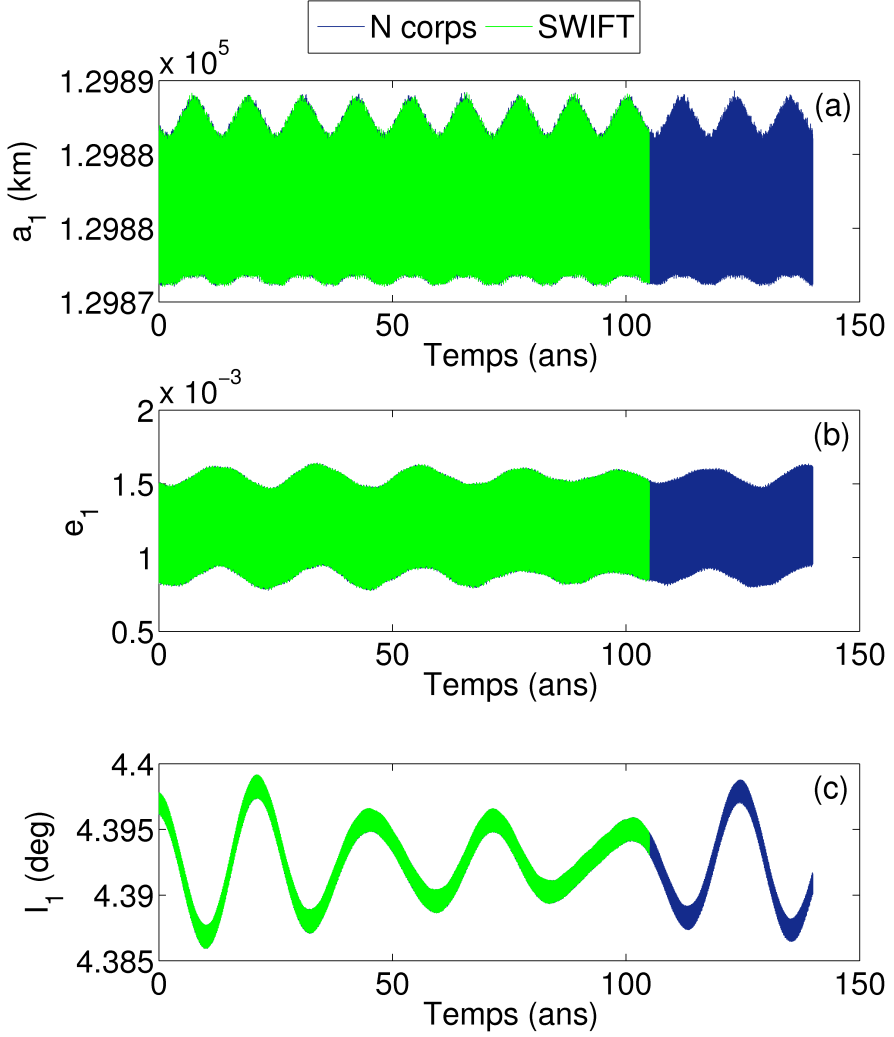


FIGURE 2.5 – Éléments orbitaux  $a_1$ ,  $e_1$  et  $I_1$  de Miranda en fonction du temps, obtenus via l'intégrateur ABM d'ordre 10 (en bleu) et via la méthode WHM du logiciel SWIFT (en vert).



---

### Résonance 3 : 1 Cressida-Miranda

---

Le système intérieur d'Uranus est composé de 13 lunes. En 1986, 10 d'entre elles ont été découvertes par la sonde *Voyager 2* [Smith *et al.*, 1986]. La découverte de Perdita a été annoncée par Karkoschka [1999] et les deux dernières, Mab et Cupid, ont été découvertes par Showalter et Lissauer [2006], ces auteurs utilisant les images du télescope spatial *Hubble*. Ces satellites sont fortement liés à un système d'anneaux avec, en particulier, Cordélia et Ophélie, les satellites bergers de l'anneau  $\epsilon$  [Porco et Goldreich, 1987]. Ce système complexe est dense puisque les lunes et les anneaux sont à l'intérieur de l'orbite du satellite principal Miranda, sur une échelle de demi-grands axes pour les satellites entre 49 752 km et 97 736 km d'Uranus.

Dans Jacobson [1998], les observations astrométriques de *Hubble* et les données d'imagerie de *Voyager 2* sont ajustées pour obtenir une révision des éléments orbitaux des 10 premières lunes intérieures. Le mouvement des 3 autres satellites, et en particulier celui du satellite Mab, est mal compris [Kumar *et al.*, 2011]. Principalement à cause de notre méconnaissance des masses et du manque de précision des observations de ces satellites, il n'y a pour le moment aucun modèle reproduisant la dynamique de l'ensemble du système intérieur. Les éphémérides du JPL en particulier se résument à des orbites keplériennes précéssantes. L'annexe D présente une comparaison entre ces éphémérides et notre code d'intégration du problème des N corps dans le cas de Cressida. Une approximation des éphémérides est obtenue en ne considérant que les perturbations de Miranda et de l'aplatissement de la planète sur le petit satellite. On verra également que l'ajout d'un second satellite intérieur perturbe grandement le mouvement du petit corps : le mouvement obtenu pour le petit satellite

s'éloigne alors fortement de celui fourni par les éphémérides (cf. Annexe D).

Pour compléter l'état de l'art du système intérieur d'Uranus, citons également le travail de French et Showalter [2012] qui explorent la stabilité des satellites intérieurs d'Uranus sur une grande échelle de masses. Ils suggèrent en particulier que les satellites intérieurs sont dans une phase de transition avec des collisions probables dans le futur entre Cupid et Belinda sur une échelle de temps de  $10^3 - 10^7$  ans. Pour un temps supérieur à  $10^5$  ans, Cressida et Desdémone pourraient également se croiser. Ce dernier travail est une suite des recherches de Duncan et Lissauer [1997] qui discutent de la stabilité du système sur une échelle de temps de  $10^6 - 10^8$  ans. Ces auteurs notent également la proche commensurabilité 3 : 1 entre Miranda et les satellites intérieurs Cressida et Desdémone.

Ce chapitre présente un modèle à 3 corps **restreint** moyennné et considérant l'effet séculaire de l'aplatissement sur les satellites afin d'étudier la résonance 3 : 1 entre un satellite intérieur quasi-résonant (Cressida ou Desdémone) et le satellite principal, Miranda, les satellites intérieurs étant situés de part et d'autre de la résonance. Le problème restreint des 3 corps est abordé couramment et en particulier dans l'équipe de Namur avec, par exemple, l'étude de la dynamique des astéroïdes [Lemaître, 1984; Jancart et Lemaître, 2001]. En particulier, une première idée pour expliquer les positions de Cressida et Desdémone était basée sur le travail de Morbidelli et Moons [1993] qui expliquent le phénomène de déplétion d'astéroïdes à certaines résonances en moyen mouvement avec Jupiter par la présence de résonances séculaires à l'intérieur de ces commensurabilités. L'idée était donc de reprendre le même scénario dans le cas des satellites intérieurs d'Uranus avec Miranda jouant le rôle du perturbateur et Cressida/Desdémone, le rôle d'un petit corps.

Cependant, le rapport de masses Miranda/Uranus en comparaison avec Jupiter/Soleil est 1000 fois plus petit, réduisant la taille de la résonance. De plus, le manque d'informations concernant les masses des petits satellites rend une étude précise compliquée. On verra dans ce chapitre que l'analyse par un modèle de résonance de second ordre dissipatif donne une explication plausible quand au futur des satellites Cressida et Desdémone. Une approche analytique basée sur les travaux de Henrard et Caranicolas [1990]; Henrard et Sato [1990] et Moons et Henrard [1994] pour le modèle du 3 corps restreint et sur celui de [Lemaître, 1984] pour son étude et son interprétation via un modèle de résonance de second ordre est mise en œuvre.

La première partie du chapitre présente la construction du modèle amenant à un modèle de résonance de second ordre. La seconde introduit l'effet dissipatif de marée. Des comparaisons entre le modèle analytique et une simulation numérique d'un problème des 3 corps complet sont effectuées dans le cas dissipatif ou non. Dans l'ensemble de la thèse, le formalisme Hamiltonien est utilisé.

### 3.1 Modèle

Cette section présente la construction d'un problème des 3 corps moyen restreint avec l'effet séculaire de  $\mathbf{J}_2$  sur le petit satellite et son perturbateur Miranda : il sera noté par  $\mathbf{ARTBP}_{\mathbf{J}_2}$  pour « *Averaged Restricted Three Body Problem with  $\mathbf{J}_2$*  ». Le modèle est construit par étapes en ajoutant chaque perturbation souhaitée l'une après l'autre. Les termes de courtes périodes seront ensuite moyennés pour ne conserver que les termes séculaires et résonants.

Considérons donc la dynamique du système comme décrite par les équations du mouvement de l'Hamiltonien autonome à  $N$  degrés de liberté  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  (voir e.g. Carletti [2007]) :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}, \quad (3.1)$$

où le couple  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_i, p_i)_{i=1:N}$ , reprenant les  $N$  coordonnées  $q_i$  et moments conjugués  $p_i$ , définit l'espace de phase du système. Le système d'équations (3.1) est celui d'Hamilton-Jacobi. Par un choix de variables  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  judicieux, cet Hamiltonien  $\mathcal{H}$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{P}) + \mathcal{V}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{H}_0(\mathbf{P})$  est un problème intégrable, perturbé par la partie  $\mathcal{V}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  de l'Hamiltonien. Dans ce travail, les nouvelles variables  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  vérifieront la relation :

$$\mathbf{P} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.3)$$

impliquant leur canonicité.

#### 3.1.1 Problème à 2 corps

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}_{2B}$  du problème des 2 corps, décrivant le mouvement keplerien d'un satellite autour de sa planète est donné par l'énergie totale du système et s'écrit :

$$\mathcal{H}_{2B} = -\frac{\mu}{2a}, \quad (3.4)$$

avec  $\mu = G(m_0 + m)$  où la masse  $m$  du satellite est négligée par rapport à la masse du corps central. Les éléments elliptiques ne formant pas un ensemble de variables canoniques, les éléments de Delaunay  $(l, g, h, L, G, H)$  sont introduits. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} l & L = \sqrt{\mu a} \\ g & G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\ h & H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos I, \end{aligned} \quad (3.5)$$



où  $l$  est l'anomalie moyenne,  $g$  l'argument du péricentre et  $h$  la longitude du nœud ascendant. L'Hamiltonien du problème des 2 corps (3.4) exprimé dans les variables (3.5) est donné par :

$$\mathcal{H}_{2B} = -\frac{\mu^2}{2L^2} . \quad (3.6)$$

### Effet séculaire de l'aplatissement sur le satellite

L'étape suivante est l'introduction de la perturbation résultante de l'aplatissement de la planète sur le petit corps. Considérant le potentiel (2.11) avec  $J_4 = 0$ , la perturbation séculaire due à l'aplatissement de la planète sur le petit satellite est donnée notamment par Duriez [2002] :

$$\mathcal{H}_{J_2} = -\mu J_2 \frac{R_p^2}{a^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 I \right) (1 - e^2)^{-3/2}, \quad (3.7)$$

qui, exprimée dans les variables (3.5), donne la formulation suivante pour  $\mathcal{H}_{J_2}$  :

$$\mathcal{H}_{J_2} = \frac{\mu^4 J_2 R_p^2}{4L^3 G^3} \left( 1 - 3 \frac{H^2}{G^2} \right) . \quad (3.8)$$

Considérant les équations (3.6) et (3.8), le problème séculaire à 2 corps où le petit satellite est perturbé par l'aplatissement de la planète est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_{2B} + \mathcal{H}_{J_2} \\ &= -\frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4 J_2 R_p^2}{4 L^3 G^3} - \frac{3 \mu^4 J_2 R_p^2}{4 L^3 G^5} H^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où, par les équations d'Hamilton-Jacobi (3.1), l'évolution des angles en fonction du temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{3}{4} \mu^4 J_2 R_p^2 \frac{1}{L^4 G^3} \left( -1 + 3 \frac{H^2}{G^2} \right) \\ \dot{g} &= \frac{3}{4} \mu^4 J_2 R_p^2 \frac{1}{L^3 G^4} \left( -1 + 5 \frac{H^2}{G^2} \right) \\ \dot{h} &= -\frac{3}{2} \mu^4 J_2 R_p^2 \frac{H}{L^3 G^5}. \end{aligned}$$

Dans le cas de petites excentricités  $e$  et inclinaisons  $I$ , les moments de Delaunay (3.5) sont quasi équivalents. Pour contourner cet inconvénient, on introduit les éléments de Delaunay modifiés  $(\lambda, p, q, L, P, Q)$  : ils sont des combinaisons linéaires des éléments de Delaunay (3.5) et sont définis par :

$$\begin{aligned} \lambda &= l + g + h & L &= \sqrt{\mu a} \\ p &= -g - h & P &= L - G = \sqrt{\mu a} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ q &= -h & Q &= G - H = \sqrt{\mu a} (1 - e^2) (1 - \cos I), \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $p$  et  $q$  sont les opposés des longitudes du péricentre et du nœud ascendant respectivement. Dans ces variables (3.10), l'expression de l'Hamiltonien (3.9) est :

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4 J_2 R_p^2}{4 L^3 (L-P)^3} - \frac{3}{4} \mu^4 \frac{J_2 R_p^2}{L^3 (L-P)^5} (L-P-Q)^2, \quad (3.11)$$

dont les équations du mouvement associées donnent les variations des angles via les équations d'Hamilton-Jacobi (3.1) :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\mu^2}{L^3} + \frac{3}{4} \mu^4 J_2 R_p^2 \frac{1}{L^4 G^6} \left( -G^3 + 3GH^2 - G^2 L + 5H^2 L - 2GHL \right) \\ \dot{p} &= -\frac{3}{4} \mu^4 J_2 R_p^2 \frac{1}{L^3 G^4} \left( -1 - 2\frac{H}{G} + 5\frac{H^2}{G^2} \right) \\ \dot{q} &= \frac{3}{2} \mu^4 J_2 R_p^2 \frac{H}{L^3 G^5}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $H = L - P - Q$  et  $G = L - P$ . Par la première équation de (3.12), le moyen mouvement du satellite est exprimé comme :

$$\dot{\lambda} = n_0 + n_1,$$

$n_0$  étant le moyen mouvement perturbé par  $n_1$ , l'effet séculaire de l'aplatissement d'Uranus.

### 3.1.2 Perturbation du troisième corps

La perturbation du troisième corps est donnée via le potentiel perturbateur (2.3), décrit au chapitre 2 où les variables indicées  $i$  sont celles du petit satellite, et, celles indicées  $j$ , celles du corps perturbateur. Dans le cas du problème des 3 corps restreint, les variables liées au perturbateur seront différenciées de celles liées au petit corps par le symbole « ' » pour le perturbateur. Cette notation est de mise dans l'ensemble du chapitre. On notera donc les vecteurs positions  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}'$  pour le petit satellite et le troisième corps respectivement. La masse du corps perturbateur  $m_j$  sera dès lors notée  $m'$ .

La distance  $r_{ij} = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|$  entre les deux satellites est développée en polynômes de Legendre  $P_l$ . Le potentiel perturbateur pour le troisième corps s'écrit alors :

$$V_{3b} = -\frac{Gm'}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos \beta) \quad \text{avec} \quad r < r',$$

où le produit scalaire est écrit comme  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \beta$ . Cette perturbation est développée en séries en excentricités et inclinaisons en utilisant ici les formulations de Murray et Dermott [1999] :

$$V_{3b} = -Gm' \sum_{l, \dots, l_6} S_{(l)}(a, a', e, e', I, I') \cos(\kappa), \quad (3.13)$$

où

$$\kappa = l_1 \lambda' + l_2 \lambda + l_3 \varpi' + l_4 \varpi + l_5 \Omega' + l_6 \Omega , \quad (3.14)$$

où  $l_i$   $i = 1 : 6$  sont des entiers tels que

$$\sum_{i=1}^6 l_i = 0 , \quad (3.15)$$

cette dernière expression étant la *caractéristique de d'Alembert*.

L'expression du potentiel perturbateur  $V_{3b}$  est ensuite réécrite dans les variables de Delaunay modifiées (3.10) :

$$V_{3b} = V_{3b}(\lambda, p, q, L, P, Q, \lambda', p', q', L', P', Q') , \quad (3.16)$$

l'ensemble de variables  $(\lambda', p', q', L', P', Q')$  étant associé au perturbateur.

### Effet séculaire de l'aplatissement sur le perturbateur

Le coefficient  $J_2$ , par son effet sur les vitesses de précession des orbites, tend à écarter les résonances les unes des autres. Il est donc nécessaire de considérer son effet séculaire sur le corps perturbateur aussi.

Dans un problème des 3 corps restreint, le petit satellite n'a aucun effet sur le perturbateur : l'orbite externe est dès lors fixée et les moments  $(L', Q', P')$  sont des constantes du mouvement. Les angles associés  $(\lambda', p', q')$  sont des fonctions linéaires du temps et leurs expressions sont données par (3.12) avec des variables primées pour l'orbite du perturbateur. On note en particulier :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}' &= n'_0 + n'_1 = n' \\ \dot{p}' &= n_{p'} \\ \dot{q}' &= n_{q'} , \end{aligned} \quad (3.17)$$

$n'$ ,  $n_{p'}$  et  $n_{q'}$  étant des constantes. L'effet du  $J_2$  sur le satellite perturbateur est contenu dans les expressions de  $n'_1$ ,  $n_{p'}$  et  $n_{q'}$ . Le potentiel perturbateur (3.16) est dépendant du temps  $t$  au travers de ces trois angles  $\lambda'$ ,  $p'$  et  $q'$ . On ajoute donc  $t$  comme variable. Le potentiel perturbateur (3.16) s'écrit comme :

$$V_{3b} = V_{3b}(\lambda, p, q, L, P, Q, t) .$$

Cette dernière expression est ajoutée à l'Hamiltonien (3.11) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4}{4} \frac{J_2}{L^3} \frac{R_p^2}{(L-P)^3} - \frac{3}{4} \mu^4 \frac{J_2}{L^3} \frac{R_p^2}{(L-P)^5} (L-P-Q)^2 \\ &+ V_{3b}(\lambda, p, q, L, P, Q, t) + \Lambda , \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $\Lambda$  est le moment associé à la variable  $t$ . Pour résumer, le premier terme est le problème des 2 corps classique, le second et le troisième termes sont les

perturbations séculaires de l'aplatissement d'Uranus sur le petit satellite et les deux derniers termes sont associés à l'introduction du troisième corps, lui-même perturbé par l'aplatissement de la planète.

### 3.1.3 Hamiltonien résonant

Pour examiner la résonance en moyen mouvement 3 : 1 entre un petit satellite et son perturbateur, la combinaison résonante exacte :

$$\Phi = \lambda - 3\lambda'$$

est considérée et, après la moyennisation sur les courtes périodes  $\lambda'$ , les deux angles dépendants du nœud ( $-q$ ) et du péricentre ( $-p$ ) du petit satellite sont définis :

$$\begin{aligned} \sigma &= -\Phi/2 + p & P \\ \tau &= -\Phi/2 + q & Q \\ \Phi/2 &= \varphi & \tilde{M} = 2L + P + Q \\ t & & \Gamma = 3n'L + \Lambda \end{aligned} \quad (3.19)$$

où on note le lien avec les angles résonants présentés en introduction (1.1),  $\sigma = -\frac{1}{2}\theta_6$  et  $\tau = -\frac{1}{2}\theta_1$ . Ce nouveau jeu de variables (3.19) définit un ensemble canonique selon la loi (3.3). Le moment  $\tilde{M} = \tilde{M}_0 + \tilde{m}$  où  $\tilde{M}_0$  est une constante à déterminer plus tard et  $\tilde{m}$  est une petite quantité. Le moment  $L$  est écrit :

$$L = \frac{1}{2}(\tilde{M}_0 + \tilde{m} - (P + Q)) , \quad (3.20)$$

où les moments  $P$  et  $Q$  sont petits pour des petites excentricités et inclinaisons. Par le remplacement du moment  $L$ , et après le développement au second ordre en puissances de  $\frac{\tilde{m}}{\tilde{M}_0}$ , la partie keplerienne de (3.18) se réécrit par :

$$-\frac{\mu^2}{2L^2} = \frac{4\mu^2}{\tilde{M}_0^3} (\tilde{m} - (P + Q)) - \frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} (\tilde{m} - (P + Q))^2 . \quad (3.21)$$

Le processus est identique pour le second et le troisième termes de (3.18) qui, après le remplacement du moment  $L$  (3.20) et le développement en séries en puissances de  $\frac{\tilde{m}}{\tilde{M}_0}$  au premier ordre, sont approchés par :

$$\frac{\mu^4 J_2 R_e^2}{4 L^3 (L - P)^3} - \frac{3}{4} \mu^4 \frac{J_2 R_e^2}{L^3 (L - P)^5} (L - P - Q)^2 = \frac{192\mu^4 J_2 R_e^2}{\tilde{M}_0^7} (\tilde{m} - 2P) . \quad (3.22)$$

Par les équations (3.21) et (3.22), l'Hamiltonien tronqué (3.18) est réécrit par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left[ \frac{4\mu^2}{\tilde{M}_0^3} - \frac{3n'}{2} \right] (\tilde{m} - (P + Q)) - \frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} (\tilde{m} - (P + Q))^2 \\ &+ \frac{192 \mu^4 J_2 R_p^2}{\tilde{M}_0^7} (\tilde{m} - 2P) \\ &+ V_{3b}(\sigma, \tau, \varphi, P, Q, \tilde{m}, t) + \Gamma , \end{aligned} \quad (3.23)$$

où, dans le nouvel ensemble de variables (3.19), la première partie de l'Hamiltonien est le problème des 2 corps, la seconde partie est l'effet de l'aplatissement de la planète sur le petit satellite et la dernière est le potentiel perturbateur. Notons que l'expression de la perturbation due à l'aplatissement est en accord avec l'Hamiltonien (4) dans Moons et Henrard [1994] dans le cas de  $P = 0$ . Comme il n'y a pas de dépendance en moment  $Q$  dans la seconde partie de l'Hamiltonien (3.23), l'expression de la perturbation causée par l'aplatissement pourrait suggérer que l'aplatissement de la planète agit seulement sur l'excentricité de l'orbite du perturbateur. L'effet sur l'inclinaison de l'orbite est cependant contenu dans le terme correctif apparaissant dans la définition de  $n'$  dans le premier terme de l'Hamiltonien (3.23).

Dans le cas d'une résonance en moyen mouvement 3 : 1, il n'existe aucun couplage résonant entre les résonances en inclinaison et en excentricité au second degré [Tittlemore et Wisdom, 1988; Malhotra et Dermott, 1990]. En effet, le développement du potentiel perturbateur (3.16) au second ordre en excentricité et en inclinaison ne dispose d'aucune combinaison couplée (voir e.g. le développement donné dans Murray et Dermott [1999] et le chapitre 4 pour plus de détails).

L'Hamiltonien (3.23) dispose de 4 degrés de liberté : le découplage en un cas excentrique et un cas incliné permet l'étude d'un Hamiltonien avec deux degrés de liberté et, ensuite, la simplification vers un seul degré de liberté par l'introduction de variables angle-action.

### 3.1.4 Cas circulaire incliné

Une nouvelle transformation canonique est introduite considérant le nœud  $(-q')$  et le péricentre  $(-p')$  du perturbateur :

$$\begin{aligned} \sigma & P \\ \tau & Q \\ \rho = \varphi - q' & \tilde{m} \\ \nu = p' & \Gamma' = \frac{\Gamma + n_{q'} \tilde{m}}{n_{p'}} , \end{aligned} \tag{3.24}$$

où les expressions  $n_{q'}$  et  $n_{p'}$  sont définies par les équations du mouvement du perturbateur (3.17). On note le lien avec les angles résonants présentés en introduction (1.1),  $\rho = -\frac{1}{2}\theta_3$ . Le moment  $\Gamma'$  est obtenu par la relation canonique suivant la loi (3.3) :

$$\begin{aligned} d\varphi \tilde{m} + dt \Gamma &= d\rho \tilde{m} + d\nu \Gamma' \\ &= d\varphi \tilde{m} - dq' \tilde{m} + dp' \Gamma' \\ &= d\varphi \tilde{m} - n_{q'} dt \tilde{m} + n_{p'} dt \Gamma' , \end{aligned}$$

L'Hamiltonien (3.23) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left[ \frac{4\mu^2}{\tilde{M}_0^3} - \frac{3n'}{2} \right] (\tilde{m} - (P + Q)) - \frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} (\tilde{m} - (P + Q))^2 \\ &+ \frac{192 \mu^4 J_2 R_p^2}{\tilde{M}_0^7} (\tilde{m} - 2P) \\ &+ V_{3b}(\sigma, \tau, \rho, \nu, P, Q, \tilde{m}) + n_{p'} \Gamma' - n_{q'} \tilde{m} . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Suivant Moons et Henrard [1994], la constante  $\tilde{M}_0$  est choisie de telle manière que le premier terme de l'Hamiltonien (3.25) soit égal à zéro. On obtient la relation :

$$\frac{4\mu^2}{\tilde{M}_0^3} = \frac{3}{2} n' . \quad (3.26)$$

La constante  $\tilde{M}_0$  donne la distance à la résonance exacte dans le cas d'un problème incliné.

Pour étudier le problème incliné, nous choisissons le moment  $P = 0$  et l'angle associé  $\sigma$  disparaît. La variable  $\nu$  disparaît également et le moment  $\Gamma'$  est constant. L'Hamiltonien (3.25) est simplifié par :

$$\mathcal{H} = -\frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} (\tilde{m} - Q)^2 + (C_{J_2} - n_{q'}) \tilde{m} + V_{3b}(\tau, \rho, Q) , \quad (3.27)$$

où

$$C_{J_2} = \frac{192 \mu^4 J_2 R_p^2}{\tilde{M}_0^7} . \quad (3.28)$$

Le potentiel perturbateur  $V_{3b}$  est classiquement développé en série du second degré en inclinaisons. On écrit :

$$\begin{aligned} V_{3b} &= \epsilon_1 \sqrt{2Q} \cos(\tau + \rho) + \epsilon_2 \sqrt{2Q} \cos(\tau - \rho) \\ &+ \epsilon_3 2Q \cos 2\tau + \epsilon_4 \cos 2\rho , \end{aligned}$$

où les valeurs de  $\epsilon_i$ ,  $i = 1 : 4$  sont évaluées en  $\tilde{m} = 0$  (i.e.  $\tilde{M} = \tilde{M}_0$ ). Seuls les termes à longues périodes associés à la résonance  $I^2$  de l'Hamiltonien (3.27) sont sélectionnés et l'Hamiltonien résonant s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{12\mu^2 \tilde{m}}{\tilde{M}_0^4} Q - \frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} Q^2 + \epsilon_3 2Q \cos 2\tau \\ &= A Q + B Q^2 + \epsilon_3 2Q \cos 2\tau , \end{aligned} \quad (3.29)$$

et se réfère au problème intégrable (3.2).

L'Hamiltonien (3.29) décrit un modèle permettant d'étudier une résonance de second ordre de manière simplifiée [Lemaitre, 1984]. En effet, en effectuant

le changement de variables par une mise à l'échelle du moment  $Q$ , on définit [Lemaitre, 1984] :

$$R = \frac{|B|}{4 |\epsilon_3|} Q , \quad (3.30)$$

$$t' = 2 |\epsilon_3| t ,$$

avec le nouvel angle associé au moment  $R$  :

$$r = \text{sign}(B) \tau \quad \text{si } B \epsilon_3 > 0 \quad (3.31)$$

$$= \text{sign}(B) \tau + \frac{\pi}{2} \quad \text{si } B \epsilon_3 < 0 . \quad (3.32)$$

Les interprétations de ces paramètres sont données en détails par Lemaitre [1984]. L'Hamiltonien (3.29), après le changement d'échelle, est écrit par :

$$\mathcal{H}_{0i} = 2 R^2 - (2\delta + 1) R + R \cos 2r , \quad (3.33)$$

avec

$$\delta = -\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{A}{2|\epsilon_3|} \text{sign}(B) \right] .$$

Utilisant les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2R} \cos r \\ y &= \sqrt{2R} \sin r , \end{aligned}$$

l'Hamiltonien (3.33) est écrit sous la forme :

$$\mathcal{H}_{0i} = \frac{1}{2} \left( (x^2 + y^2)^2 - (2\delta + 1) (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) \right) . \quad (3.34)$$

Cet Hamiltonien a l'avantage d'être sans dimension puisqu'il est indépendant des unités du problème. Toute l'information est contenue dans le paramètre  $\delta$ .

L'intégration des équations du mouvement pour des valeurs fixées de  $\delta$  permet de retrouver les espaces de phase typiques dans le cas d'une résonance de second ordre. Ces espaces de phase pour six valeurs de  $\delta$  sont représentés dans la figure 3.1 : on y distingue les zones de circulation et les zones de libration. Pour des valeurs fixées de  $\delta < -0.5$  (Figures (a) et (b)), on observe un seul équilibre stable. La configuration passe ensuite à deux équilibres stables et un instable, ce dernier étant associé à l'apparition d'une courbe critique, aussi appelée *asymptotique*, délimitant deux zones de résonances (c). La valeur de  $\delta$  augmentant, l'ensemble évolue ensuite vers un espace de phase à 5 équilibres ((d),(e),(f)). Les expressions analytiques de ces équilibres avec leurs conditions d'existence sont données par :

$$(x, y) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } \delta \in \mathbb{R} \\ (0, \pm\sqrt{\delta+1}) & \text{si } \delta \geq -1 \\ (\pm\sqrt{\delta}, 0) & \text{si } \delta \geq 0 , \end{cases} \quad (3.35)$$

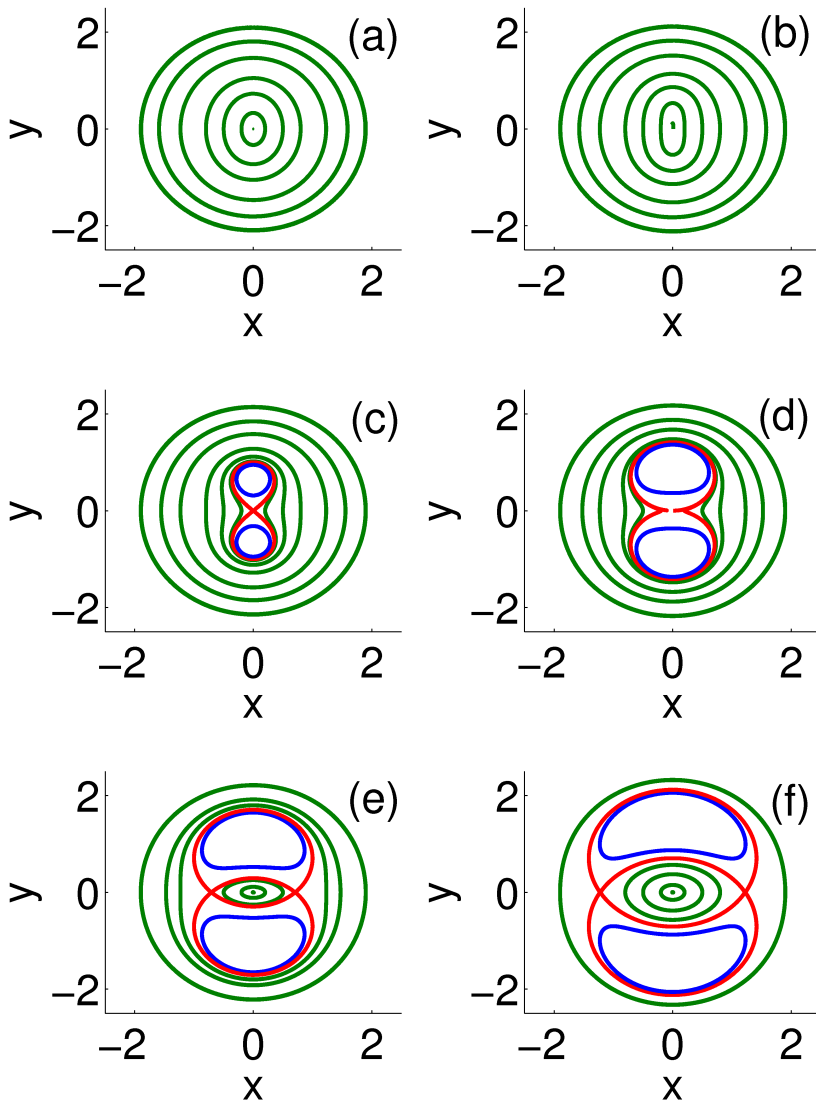


FIGURE 3.1 – Espaces de phase pour une résonance de second ordre et pour des valeurs typiques du paramètre  $\delta$  dans le plan cartésien  $(x, y)$ . Pour les graphiques (a), (b), (c), (d), (e) et (f), les valeurs de  $\delta$  sont  $\{-1.5; -1; -0.5; 0; 0.5; 1.5\}$  respectivement. Les courbes en vert définissent des orbites en circulation, celles en bleu des orbites en libration. La courbe critique est représentée en rouge.



le premier équilibre étant stable pour  $\delta < -1$  et  $\delta > 0$ . Dans les conditions d'existence précitées, les équilibres donnés par la deuxième expression sont toujours stables et ceux de la troisième expression ne le sont jamais.

### 3.1.5 Cas excentrique plan

Pour le cas excentrique plan, l'argument résonant dépend des péricentres et notamment celui du perturbateur ( $-p'$ ). Cet angle est obtenu par combinaison linéaire des deux angles  $\nu$  et  $\rho$  (3.24) :

$$\begin{aligned}\eta &= \varphi - p' \\ &= \rho + q' - \nu \\ &= \rho + (s - 1) p' + \text{Cste} .\end{aligned}\tag{3.36}$$

avec  $s = n_{q'}/n_{p'} = dq'/dp'$  donnés par les définitions (3.17) et où nous utilisons la relation de canonicité (3.3). On note le lien avec les angles résonants présentés en introduction (1.1),  $\eta = -\frac{1}{2}\theta_4$ . Cet angle  $\eta$  est associé au moment  $\Gamma'' = \Gamma' - (s - 1) \tilde{m}$ .

Dans le but de préserver la formulation de l'Hamiltonien dans les deux cas, et ainsi d'avoir une approche homogène des deux problèmes, on procède à une translation dans le premier terme de l'Hamiltonien (3.23) et donc dans la définition de la constante  $\tilde{M}_0$ , soit :

$$C_{J_2}(\tilde{m} - 2P) = 2 C_{J_2}(\tilde{m} - P) - \tilde{m} C_{J_2} ,$$

où  $C_{J_2}$  est défini par (3.28). L'Hamiltonien (3.23) s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left[ \frac{4\mu^2}{\tilde{M}_0^3} - \frac{3n'}{2} \right] (\tilde{m} - (P + Q)) - \frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} (\tilde{m} - (P + Q))^2 \\ &+ 2 C_{J_2} (\tilde{m} - P) - C_{J_2} \tilde{m} \\ &+ R(\sigma, \tau, \eta, \nu, P, Q, \tilde{m}) + n_{p'} (\Gamma'' + (s - 1) \tilde{m}) - n_{q'} \tilde{m} .\end{aligned}\tag{3.37}$$

Pour étudier le problème excentrique, nous choisissons le moment  $Q = 0$  et l'angle associé  $\tau$  disparaît. La variable  $\nu$  disparaît également et le moment  $\Gamma''$  est constant. Le dernier Hamiltonien (3.37) est simplifié par :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left[ \frac{4\mu^2}{\tilde{M}_0^3} - \frac{3n'}{2} + 2 C_{J_2} \right] (\tilde{m} - P) - \frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} (\tilde{m} - P)^2 \\ &+ (-C_{J_2} - n_{p'})\tilde{m} + V_{3b}(\tau, \eta, P) ,\end{aligned}\tag{3.38}$$

où  $V_{3b}$  est développé classiquement au second degré en excentricités et est écrit :

$$\begin{aligned}V_{3b} &= \epsilon_1 \sqrt{2P} \cos(\sigma + \nu) + \epsilon_2 \sqrt{2P} \cos(\sigma - \nu) \\ &+ \epsilon_3 2P \cos 2\sigma + \epsilon_4 \cos 2\nu ,\end{aligned}\tag{3.39}$$

les valeurs de  $\epsilon_i$  étant évaluées en  $\tilde{m} = 0$  (i.e.  $\tilde{M} = \tilde{M}_0$ ). Suivant Moons et Henrard [1994], la constante  $\tilde{M}_0$  est choisie de telle manière que le premier terme de l'Hamiltonien (3.38) soit nul. On obtient la relation :

$$\frac{4\mu^2}{\tilde{M}_0^3} = \frac{3n'}{2} - 2 C_{J_2} , \quad (3.40)$$

$\tilde{M}_0$  étant obtenu numériquement comme l'unique racine réelle de cette dernière équation. Les deux expressions analytiques de  $\tilde{M}_0$  (3.26) et (3.40) sont différentes selon le cas étudié et donnent deux distances différentes à la résonance exacte dans le cas du problème incliné (angles résonants dépendants des nœuds) ou dans le cas du problème excentrique (angles résonants dépendants des péricentres). Une erreur numérique sur ce paramètre  $\tilde{M}_0$  entrainerait donc un décalage sur l'emplacement de la résonance. La forme finale de l'Hamiltonien dans le problème excentrique est donnée par :

$$\mathcal{H} = -\frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} (\tilde{m} - P)^2 + (-C_{J_2} - n_{p'}) \tilde{m} + V_{3b}(\tau, \eta, P) , \quad (3.41)$$

la principale différence avec le cas incliné (3.27) étant la définition de la constante  $\tilde{M}_0$  qui place les résonances agissant sur les inclinaisons ou les excentricités au bon endroit. L'Hamiltonien résonant est obtenu de la même manière que dans le cas incliné :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{12\mu^2\tilde{m}}{\tilde{M}_0^4} P - \frac{6\mu^2}{\tilde{M}_0^4} P^2 + \epsilon_3 2P \cos 2\sigma \\ &= A P + B P^2 + \epsilon_3 2P \cos 2\sigma . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ce dernier Hamiltonien a exactement la même formulation que dans le cas incliné. Une mise à l'échelle similaire que dans les équations (3.30) à (3.32) est utilisée afin d'obtenir la forme sans dimension de l'Hamiltonien dans les variables excentriques  $(\tau, \eta, P)$ . Celui-ci s'écrit comme :

$$\mathcal{H}_{0e} = 2 R^2 - (2\delta + 1) R + R \cos 2r , \quad (3.43)$$

avec  $R = \frac{|B|}{4 |\epsilon_3|} P$ .

## 3.2 Hamiltonien résonant sans dimension

### 3.2.1 Fréquence de libration

Étant donnée la formulation homogène des Hamiltoniens sans dimension  $\mathcal{H}_{0i}$  (3.33) et  $\mathcal{H}_{0e}$  (3.43), l'étude détaillée de ceux-ci est effectuée sans regarder s'il s'agit du cas incliné ou excentrique puisque, dans chacun d'eux, l'expression de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  résonant sans dimension est donnée en coordonnées

cartésiennes par :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left( (x^2 + y^2)^2 - (2\delta + 1) (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) \right). \quad (3.44)$$

Cet Hamiltonien à un degré de liberté peut être analysé en détails (Lemaitre [1984]), et ses équilibres exprimés analytiquement. Les équilibres stables sont définis par (3.35).

L'Hamiltonien cartésien (3.44) est développé au second ordre autour de chaque équilibre stable  $(x_e, y_e)$ , afin d'obtenir une approximation d'un oscillateur linéaire. Introduisant un ensemble de variables locales angle-action  $(J, \Psi)$  par :

$$\begin{aligned} x &= x_e + \sqrt{2J} \cos \Psi \\ y &= y_e + \sqrt{2J} \sin \Psi, \end{aligned}$$

la fréquence de libration  $\dot{\Psi}$  à l'équilibre (correspondant à  $J = 0$ ) est calculée et, par là même, la période de libration  $\mathcal{P}$  correspondante. Les résultats sont présentés dans la Table 3.1 pour les deux équilibres et ont été vérifiés par intégration numérique de l'Hamiltonien (3.44).

TABLE 3.1 – Expressions analytiques pour les périodes de libration  $\mathcal{P}$  évaluées pour  $\delta = 0.5$ , dans les unités de temps du modèle sans dimension.

Équilibre	Fréquence	Période $\mathcal{P}$ pour $\delta = 0.5$
$(0, 0)$	$\frac{\pi\sqrt{\delta}}{\delta\sqrt{\delta+1}}$	3.6276
$(0, \sqrt{\delta+1})$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}(\delta+1)}$	1.8138

### 3.2.2 Dissipation

Un des avantages du modèle de résonance décrit précédemment est l'introduction aisée d'un effet dissipatif, par l'introduction d'une lente variation en temps du paramètre  $\delta$ . Par la théorie de l'invariant adiabatique [Henrard, 1982], si cette variation est suffisamment lente, l'aire sous-tendue par une courbe est quasi préservée au cours du temps à moins qu'elle ne rencontre une séparatrice.

Le diagramme d'aire permet d'étudier différents scénarios dissipatifs et le passage résultant d'une trajectoire d'une zone caractéristique à l'autre. On utilise l'index d'aire  $\Theta$  qui définit les valeurs des aires à l'intérieur de courbes

$A_1$  et  $A_2$  dites critiques et dont les expressions analytiques sont données pour un modèle de résonance d'ordre 2 par Lemaitre [1984] :

si  $-1 \leq \delta \leq 0$

$$\begin{cases} A_1(\delta) = 0 \\ A_2(\delta) = (2\delta + 1) (\pi - \arccos(2\delta + 1)) + 2\sqrt{-\delta (\delta + 1)} , \end{cases}$$

si  $\delta \geq 0$

$$\begin{cases} A_1(\delta) = (2\delta + 1) \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2\delta + 1}} \right) \pm \sqrt{2R} \\ A_2(\delta) = (2\delta + 1) \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2\delta + 1}} \right) \mp \sqrt{2R} . \end{cases}$$

Ces courbes, représentées en traits pleins dans la figure 3.2 (a), délimitent les zones interne (I), résonante (R) et externe (E).

Le paramètre  $\delta$  est dépendant du temps au travers de  $\tilde{M}_0$  présent dans les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $\epsilon_3$  pour les modèles excentrique et incliné. La capture dans la résonance (ou le saut au-dessus de la résonance) dépend essentiellement du signe de  $\dot{\delta}$ .

Dans le cas d'un  $\delta$  décroissant, différents schémas sont possibles : ils sont illustrés à la figure 3.2. On observe, dans le cas (b), une condition initiale dans la zone de résonance (en vert). L'orbite évolue en zone résonante jusqu'à rencontrer la séparatrice : elle évolue ensuite dans la zone externe (parcours vert dans la figure 3.2 (a)). Dans le cas (c), une condition initiale est choisie dans la zone interne (en rouge). Avec la dissipation, l'aire sous-tendue oscille de manière quasi constante, jusqu'à rencontrer la séparatrice. On observe alors un saut sans capture vers la zone externe (parcours rouge dans la figure 3.2 (a)). Ce saut est caractérisé par une augmentation en  $I$  ou  $e$  en fonction de l'angle rencontré. Un dernier scénario (d) consiste à considérer une condition initiale dans la zone externe (en bleu). Avec la dissipation, celle-ci reste en zone extérieure (parcours bleu dans la figure 3.2 (a)).

En particulier, le scénario (c) représenté en rouge à la figure 3.2 sera étudié dans le cas de Cressida et Desdémone dans la section 3.5.

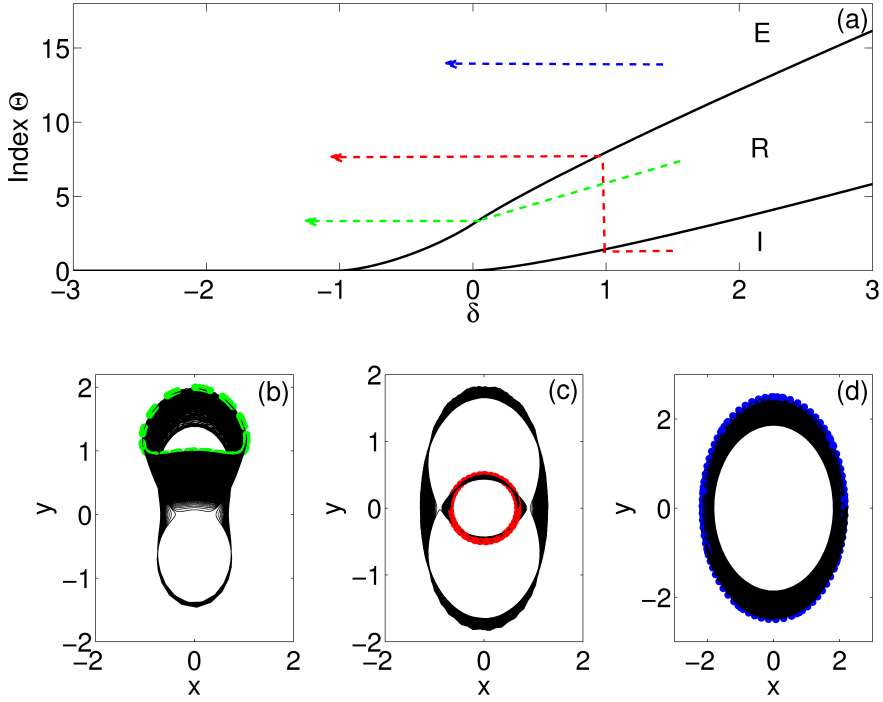


FIGURE 3.2 – Différents schémas d'évolution d'orbite lorsque  $\delta$  est décroissant. La figure (a) est le diagramme d'aire dans lequel on peut suivre la trajectoire dissipative lorsqu'elle évolue d'une zone résonante (R) vers une zone externe (E) (b), d'une zone interne (I) vers une zone externe (c) et enfin, lorsque l'orbite est déjà en zone externe (d). Les couleurs dans les graphiques (b), (c) et (d) représentent la condition initiale et le début de l'évolution de l'orbite.

### 3.3 Résonance interne 3 : 1 avec Miranda : Cressida ou Desdémone

#### 3.3.1 Modèle ARTBP $_{J_2}$ appliqué à Miranda

Pour le cas incliné, les expressions analytiques et numériques de  $A$ ,  $B$  et  $\epsilon_3$  données dans (3.29) ont été validées avec celles présentées par Henrard et Sato [1990] sur le problème de la résonance en moyen mouvement 3 : 1 entre Miranda et Umbriel, utilisant les mêmes unités, choisissant la constante gravitationnelle  $G$  égale à 1. La somme des masses  $m_0 + m'$  et le moyen mouvement du perturbateur  $n'_0$  sont égaux à 1.

Pour le cas de Cressida ou Desdémone, Miranda joue le rôle du perturbateur ; utilisant les mêmes unités, les coefficients dans le cas incliné ont comme valeurs  $A = 3.6103 \cdot 10^{-7}$ ,  $B = -1.6234$  et  $\epsilon_3 = -9.0258 \cdot 10^{-8}$  à la résonance exacte. Ces coefficients ont été calculés en considérant les paramètres donnés par la base de données du JPL. Notons la petite valeur de  $\epsilon_3$  indiquant une résonance très étroite : ce paramètre dépend essentiellement du rapport de masses entre le perturbateur (Miranda) et la planète (Uranus).

Dans le cas excentrique, les coefficients présents dans (3.42) ont comme valeurs  $A = -3.5879 \cdot 10^{-16}$ ,  $B = -1.6158$  et  $\epsilon_3 = -6.5549 \cdot 10^{-7}$ , où les unités sont choisies de la même manière que dans le cas incliné et les valeurs numériques sont de nouveau celles de la base de données du JPL.

### 3.3.2 Localisation des résonances

L'aplatissement de la planète a un effet sur les vitesses des nœuds des satellites principaux et donc sur la localisation des résonances : il tend à séparer les résonances. Cependant, comme spécifié au chapitre 1, dans le cas du système uranien, le paramètre  $J_2 = 0.0033$  est petit [Dermott, 1984; Tittlemore et Wisdom, 1988] par comparaison avec celui calculé pour Jupiter ( $J_2 = 0.015$ ) et Saturne ( $J_2 = 0.016$ ). Par conséquent, les résonances ne sont pas bien séparées et ne peuvent être considérées comme isolées dans le cas de grandes inclinaisons/excentricités. Nous verrons notamment au chapitre 4 que la proximité des résonances entraîne une superposition des séparatrices chaotiques lorsque l'inclinaison est élevée. Les phénomènes dynamiques sous-jacents à cette proximité entre résonances dans le système uranien ont également été présentés par Moons et Henrard [1994].

Par le modèle **ARTBP** $_{J_2}$ , nous localisons différents arguments résonants proches de la résonance exacte en moyen mouvement 3 : 1 avec Miranda, l'une en inclinaison (dépendante du nœud du petit satellite) et l'autre en excentricité (dépendante du péricentre du petit satellite). Ils correspondent aux angles  $\tau$  et  $\sigma$  :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2} (3\lambda' - \lambda + 2q) \\ \sigma &= \frac{1}{2} (3\lambda' - \lambda + 2p) ,\end{aligned}$$

avec l'effet de l'aplatissement de la planète présent dans la vitesse du nœud ( $-q$ ) et du péricentre ( $-p$ ).

Pour ce faire, l'énergie de la courbe critique est calculée à l'équilibre particulier  $(x_{eq}, y_{eq}) = (0, 0)$  (symbole ● dans la figure 3.3). Cette énergie a la même valeur tout au long de la courbe critique et, en particulier, lorsque  $y = \sqrt{2R}$  (symboles ■ dans la figure 3.3). On obtient la relation :

$$y^4 - (2\delta + 1) y^2 + \delta^2 = 0 .$$

Les solutions de cette équation bicarrée permettent d'obtenir, par la relation  $y = \sqrt{2R}$ , les expressions suivantes :

$$R = \frac{1}{2} \left( (\delta + 1) \pm \sqrt{1 + 2\delta} \right) . \quad (3.45)$$

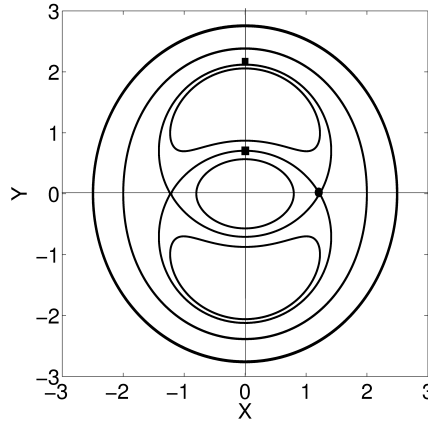


FIGURE 3.3 – Espace de phase dans le plan  $(X, Y)$  avec  $\delta = 1.5$ . L'énergie est calculée à l'équilibre  $(x_{eq}, y_{eq}) = (0, 0)$  (symbole ●). Cette énergie est la même tout au long de la courbe critique et, en particulier, en  $y = \sqrt{2R}$  (symboles ■).

Par la relation (3.45), on localise ces deux résonances dans les plans  $(a, I)$  et  $(a, e)$ , respectivement, pour une échelle de valeurs de  $\tilde{m}$ , grâce aux formules, dans le cas incliné,

$$a = \frac{(\tilde{m} + \tilde{M}_0 - Q)^2}{4\mu} \quad (3.46)$$

$$I = \arccos \left( 1 - \frac{2Q}{\tilde{m} + \tilde{M}_0 - Q} \right) ,$$

et dans le cas excentrique,

$$a = \frac{(\tilde{m} + \tilde{M}_0 - P)^2}{4\mu} \quad (3.47)$$

$$e = \sqrt{2\frac{P}{L} - \left(\frac{P}{L}\right)^2} .$$

Le résultat est représenté à la figure 3.4 : les deux formes en V pour les angles  $\tau$  et  $\sigma$  du petit satellite y sont représentées, la courbe pointillée étant associée à l'axe des ordonnées de gauche et représentant les variations en excentricité. La courbe pleine est associée à l'axe des ordonnées de droite et représente les variations en inclinaison.

La différence entre le graphique du haut (a) et celui du bas (b) est l'ajout dans (b) de la perturbation due à l'aplatissement sur le petit satellite et son perturbateur, la forme en V sans cet effet étant conservée dans le graphique (b) pour comparaison. On y observe la séparation des résonances lorsque  $J_2$  est ajouté. Cependant, cette séparation reste petite du fait du faible rapport de masses entre Miranda et Uranus : la séparation entre les deux V extérieurs est de 143 km.

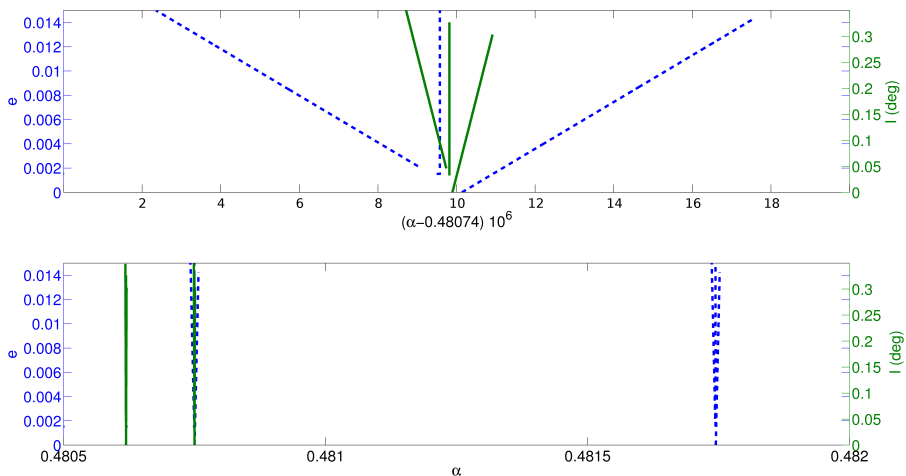


FIGURE 3.4 – Localisation des angles résonants  $\tau = \frac{1}{2} (3\lambda' - \lambda + 2q)$  et  $\sigma = \frac{1}{2} (3\lambda' - \lambda + 2p)$ . Les courbes pointillées sont associées à l'axe gauche des ordonnées Y et représentent les variations en excentricité. Les courbes pleines sont associées à l'axe Y de droite et représentent les variations en inclinaison. Le graphique (a) ne considère aucun effet d'aplatissement : les angles résonants sont tous situés à la résonance exacte. Dans le graphique (b), la forme en V à gauche donne la position de la résonance en inclinaison, tandis que celui à droite donne celle en excentricité lorsque l'effet du  $J_2$  est considéré sur les corps. Le V de la résonance exacte est conservé pour comparaison.



### 3.4 Simulations 3 corps

Comme signalé dans l'introduction, de nombreuses études se sont penchées sur l'explication de la haute inclinaison de Miranda ( $I' = 4.338^\circ$ ). Il est vrai que cette particularité à elle seule pose question sur l'évolution dynamique du système : elle sera longuement abordée dans le chapitre 4. De par cette particularité et parce que les formulations des Hamiltoniens dans les deux cas étudiés précédemment sont homogènes, nous présentons les résultats de la version inclinée du problème, appliquée au satellite intérieur Cressida. L'application du modèle théorique au satellite Desdémone est équivalente, ce satellite présentant des éléments orbitaux semblables à ceux de Cressida. L'analyse analytique détaillée est maintenant comparée avec une approche numérique.

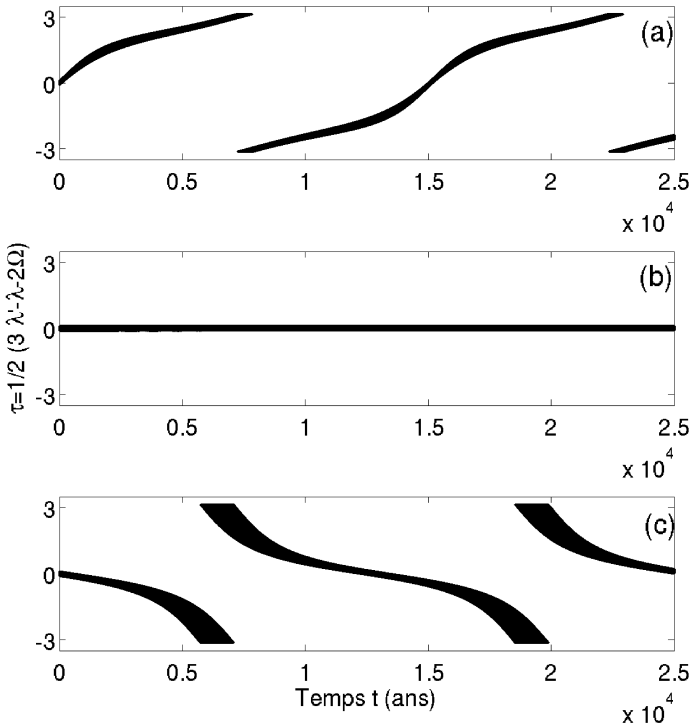


FIGURE 3.5 – Résultat des intégrations numériques dans le cas d'un problème des 3 corps complet, incliné. Les graphiques (a) et (c) présentent l'argument résonant de Cressida en circulation juste avant et juste après la rencontre de la résonance respectivement. Le graphique (b) montre le même argument résonant durant sa phase de libration. Proche de la résonance, on observe une très longue période de l'argument de circulation, supérieure à  $10^4$  ans.

Cette approche numérique est effectuée en comparant le modèle **ARTBP<sub>J<sub>2</sub></sub>** avec les sorties des intégrations numériques des équations du mouvement en coordonnées cartésiennes du problème des 3 corps complet, décrites dans le chapitre 2. On intègre dès lors l'équation présentée à la sous-section 2.2.6 avec  $N = 3$  puisque le système est composé d'Uranus, de Miranda et de Cressida<sup>1</sup>. L'intégrateur utilisé est l'ABM d'ordre 10, présenté au chapitre 2. La différence entre les deux modélisations réside dans le fait que le 3 corps modélisé à la sous-section 2.2.6 n'est ni restreint, ni tronqué et contient tous les éléments à courtes périodes qui ont été moyennés dans le modèle analytique.

Les conditions initiales pour les éléments orbitaux des satellites intérieurs dans les simulations numériques sont choisies suivant la table présentée sur le site du JPL résumée dans la table B.3. Les paramètres physiques comme le rayon des satellites, la masse d'Uranus, la valeur de  $J_2$  suivent les tables B.1 et B.2.

La figure 3.5 montre le résultat des intégrations numériques pour Cressida dans le cas d'un problème des 3 corps incliné : dans le but d'optimiser notre modèle analytique, l'excentricité initiale du petit satellite est égale à zéro et nous considérons uniquement son inclinaison. L'évolution de l'angle  $\tau$  (radians) en fonction du temps  $t$  (ans) est représentée dans trois cas : les graphiques (a) et (c) représentent l'argument résonant juste avant et juste après la rencontre de la résonance. Le graphique central (b) montre le même angle résonant durant sa phase de libration. On observe une très longue période de l'argument de circulation au-dessus de  $10^4$  ans lorsque la résonance est proche.

Le satellite intérieur Desdémone, caractérisé par de légers changements dans les conditions initiales, présente le même type d'évolution.

Cette longue période est retrouvée dans le modèle séculaire **ARTBP<sub>J<sub>2</sub></sub>** : dans le cas de l'exemple présenté dans la figure 3.5, la période autour de l'équilibre  $(0, 0)$  obtenue analytiquement (cf. Table 3.1) est de 3.6276 UT, correspondante à une valeur de 12 325 ans, après adaptation de l'unité de temps : l'approximation analytique **ARTBP<sub>J<sub>2</sub></sub>**, bien que simplifiée et moyennée, conserve des informations inhérentes du système complet, ce qui met en avant son utilité.

### 3.5 Cas dissipatif de marée

L'effet dissipatif considéré est induit par les marées sur les deux satellites, Miranda et un petit satellite intérieur, quasi résonant (Cressida ou Desdémone). Comme expliqué précédemment, cet effet agit sur les demi-grands axes et/ou sur les excentricités (cf. Chapitre 2).

---

1. Pour rappel, l'application à Desdémone est équivalente.

Il n'a cependant pas la même conséquence pour les deux satellites. Dans le cas de Miranda, l'effet est modélisé via les équations séculaires de Kaula (2.8). On suppose que le satellite est en rotation synchrone. Le nombre de Love  $k_2$  et la fonction de dissipation  $Q$  sont considérés comme des constantes fixées, les valeurs adéquates étant inconnues : dans le cas de cette étude dynamique, la valeur du rapport  $k_2/Q$  n'est pas vraiment importante. Nous verrons (cf. Chapitre 4) qu'elle peut être renforcée pour augmenter la vitesse des intégrations numériques à condition que les trajectoires restent adiabatiques. Nous choisissons les valeurs  $(k_2/Q)_p = 5.2 \cdot 10^{-4}$  et  $(k_2/Q)_s = 10^{-4}$ . Le choix de ces valeurs est explicité plus longuement dans le chapitre 4 à la section 4.3.

La perturbation causée par les marées sur le demi-grand axe du petit satellite n'est pas la même que pour Miranda. Le petit satellite est à l'intérieur de l'orbite synchrone et l'effet de marée sur le demi-grand axe approche le satellite de la planète, comme décrit notamment par Efroimsky et Lainey [2007] :

$$\frac{da}{dt} = -3n \left( \frac{k_2}{Q} \right) \frac{m R_p^5}{m_0 a^4}, \quad (3.48)$$

qui est une version de l'équation en  $\dot{a}$  de Kaula (2.8) adaptée au cas qui nous occupe.

L'effet de dissipation est ajouté dans le problème complet à 3 corps et l'évolution de l'inclinaison  $I$  (deg) en fonction du temps  $t$  en années de Cressida est présentée dans la figure 3.6 (a) : l'évolution est régulière jusqu'au passage au travers de la résonance se traduisant par un saut en inclinaison. En particulier, en sélectionnant la région du passage au travers de la résonance (boîte pointillée dans la figure 3.6 (a)), on calcule la valeur associée de  $\delta$  en fonction du temps  $t$  (évolution en gris clair dans le graphique (b)). Nous notons la décroissance de ce paramètre  $\delta$ , confirmant l'impossibilité de capture (cf. Figure 3.2 (b)).

Dans le cas de ARTBP<sub>J<sub>2</sub></sub>, les idées développées dans la sous-section 3.2.2 sont appliquées à l'effet de marée en particulier. Le facteur de dissipation est appliqué aux demi-grands axes des deux satellites, suivant les formulations de Kaula (2.8) pour le perturbateur et (3.48) pour Cressida. La masse approchée de Cressida (cf. Table B.1) a été supposée comme valeur de  $m$  dans le but de calculer la dissipation. Nous pouvons ensuite considérer cet effet dans les bonnes unités ( $G = 1$ ,  $n' = 1$ ) dans la formulation sans dimension. La valeur de  $(k_2/Q)_p = 8.95 \cdot 10^{-4}$  a été légèrement modifiée pour obtenir en moyenne le même gradient que dans le modèle complet pour l'évolution du paramètre  $\delta$  en fonction du temps  $t$  (courbe foncée dans le graphique de la figure 3.6 (b)).

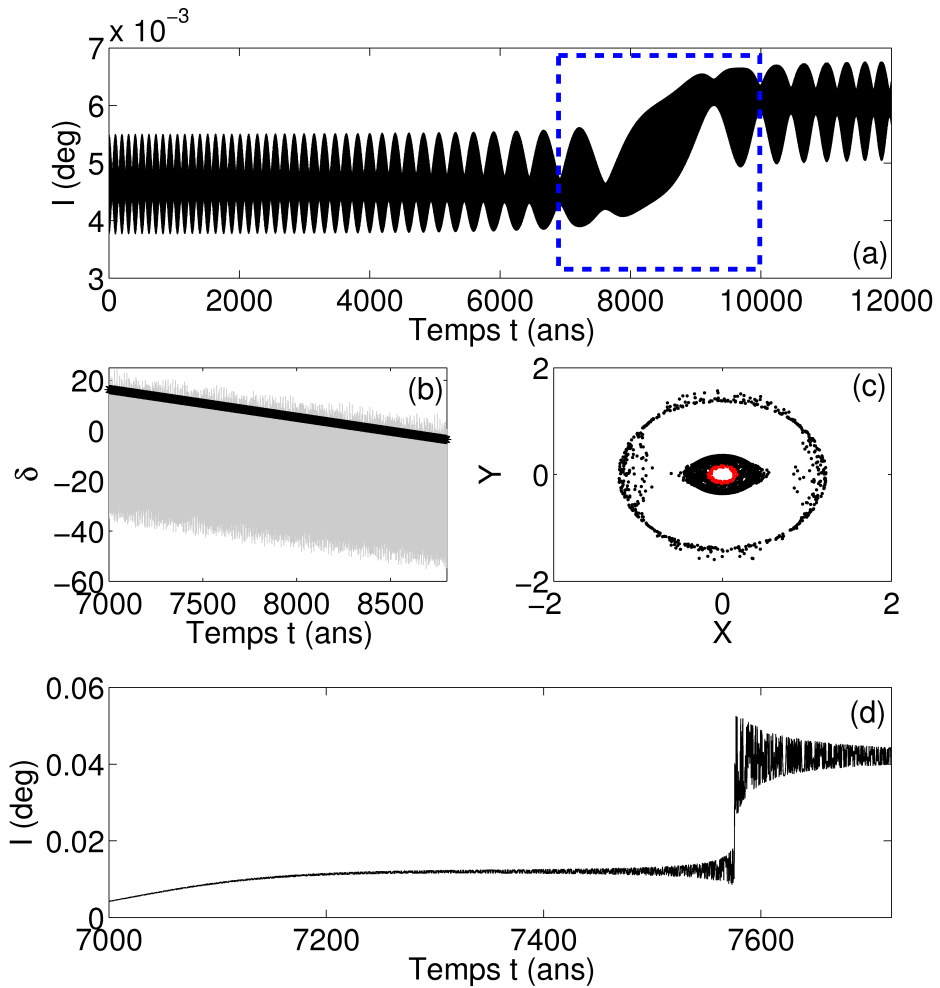


FIGURE 3.6 – Schéma de dissipation pour l'évolution du satellite Cressida. Le graphique (a) est l'évolution de l'inclinaison de Cressida  $I$  (deg) en fonction du temps  $t$  (ans) obtenue via l'intégration du problème complet à 3 corps. La boîte pointillée sélectionne la portion d'évolution avec laquelle on calcule la valeur de  $\delta$ . Le graphique (b) présente l'évolution de  $\delta$  en fonction du temps dans le cas d'une simulation à 3 corps (lignes gris clair) et son approximation moyennée utilisée dans le modèle analytique (ligne foncée). Le graphique (c) montre l'orbite avec l'effet de dissipation résultante de l'intégration du modèle analytique. Le graphique (d) montre l'évolution de l'inclinaison de Cressida  $I$  (deg) en fonction du temps  $t$  (ans), obtenue par le modèle analytique ARTBP $_{J_2}$ .

Pratiquement, pour le cas incliné, la dissipation de marée sur les demi-grands axes est introduite dans les moyens mouvements des satellites qui sont insérés dans le paramètre  $\tilde{M}_0$ , n'étant de ce fait plus une constante dans le cas dissipatif :

$$\dot{\tilde{M}}_0 = \left( \frac{-8\mu^2 (\dot{n}_0' + \dot{n}_1')^3}{81 (n_0' + n_1')^4} \right)^{1/3}.$$

La variation du paramètre  $\tilde{M}_0$  définit essentiellement la variation de  $\delta$ .

Le graphique (c) de la figure 3.6 est l'orbite résultante de l'intégration des équations cartésiennes du mouvement de l'Hamiltonien (3.34). On y observe l'évolution de l'orbite d'une zone interne vers une zone externe sans capture dans la résonance. Notons la constance des aires interne et externe illustrant l'adiabaticité du mouvement. Le dernier graphique de l'évolution est l'inclinaison de Cressida  $I$  (deg) en fonction du temps  $t$  (ans) obtenue avec la relation (3.46).

Le graphique (a) de la figure 3.6 montre une évolution possible de l'inclinaison de Cressida avec le modèle à 3 corps complet. En choisissant une inclinaison initiale légèrement inférieure à l'inclinaison observée actuellement, on retrouve, après le passage dans la résonance, une inclinaison proche de l'actuelle ( $I = 0.006^\circ$ ). L'inclinaison dans le modèle simplifié présente un saut en inclinaison à l'emplacement de la résonance mais dont la valeur absolue est plus élevée que dans le problème complet. Cette valeur quantitative pour la saut importe peu puisque le modèle analytique consiste en un Hamiltonien tronqué et moyenné : on observe que le comportement qualitatif dans les deux approches est similaires avec un passage abrupte d'une zone interne vers une zone externe, sans capture.

Malgré une plus haute inclinaison pour Desdémone ( $I = 0.113^\circ$ ), nous supposons une phase de transition dans l'évolution des deux satellites, Cressida ayant probablement déjà dépassé la résonance et Desdémone approchant la commensurabilité et passant au travers dans un futur proche avec de petites modifications dans ses éléments orbitaux. L'échelle de temps dépend des valeurs des rapports  $k_2/Q$  liés à la dissipation de la planète et des satellites. L'inclinaison plus élevée de Desdémone n'invalide pas ce scénario puisqu'elle peut être expliquée par des phénomènes de résonances avec d'autres lunes dans le passé du satellite.

### 3.6 Conclusions et perspectives

Une première approche du problème des 3 corps, notée **ARTBP<sub>J<sub>2</sub></sub>** est développée dans ce chapitre. Celle-ci présente un modèle restreint et moyenné avec un effet séculaire de l'aplatissement de la planète sur un petit satellite

et son perturbateur. Ce modèle est introduit dans un cas générique en formalisme Hamiltonien. La fonction Hamiltonienne associée au problème est écrite en termes de variables de Delaunay modifiées et est découplée en une version inclinée ou excentrique dans le cas de la résonance de second ordre  $3 : 1$ . Cette approche classique permet la réduction du nombre de degrés de liberté résultant en un Hamiltonien à 1 degré de liberté, écrit en angle-action. La période de libration de l'angle résonant est alors déterminée analytiquement. Le modèle de résonance d'ordre supérieur développé par Lemaitre [1984] est utilisé sur une formulation homogène de l'Hamiltonien, et permet d'ajouter un effet dissipatif de manière aisée.

Ce modèle est ensuite appliqué aux satellites intérieurs d'Uranus afin de donner une explication au positionnement de Cressida et Desdémone, proches de la commensurabilité  $3 : 1$  avec le satellite principal Miranda. Les informations obtenues par le modèle analytique sont comparées avec succès aux résultats des intégrations numériques du problème des 3 corps complet sur 12000 ans. L'information préservée par le modèle analytique approché est mise en exergue et reste cohérente avec l'approche numérique du problème complet : on détermine notamment une très longue période de l'argument résonant, de l'ordre de  $10^4$  ans dans les deux cas. Un scénario d'évolution dissipative, induit par les marées, a montré une capture impossible dans la résonance  $3 : 1$  entre un petit satellite intérieur (Cressida ou Desdémone) et Miranda. L'hypothèse d'évolution passée de Cressida suppose dès lors un passage sans capture dans la zone de résonance  $3 : 1$ , et un futur passage probable pour Desdémone impliquant de légères modifications dans ses éléments orbitaux. Il semblerait donc que la configuration actuelle soit une phase de transition du système.

Les perspectives à cette étude sont assez étroites dans l'état actuel de connaissance du système intérieur d'Uranus : en effet, les observations sont peu nombreuses et certaines d'entre-elles ne sont pas encore mises à disposition de tous. De plus, ce système est en constante évolution. D'après French et Showalter [2012], le système intérieur sera sujet à de nombreuses collisions et ré-accrétions dans un avenir proche, l'analyse de la stabilité menant clairement à des croisements d'orbites et ce, sous l'hypothèse d'un large panel de masses. L'indétermination sur les masses des satellites rend toute étude dynamique incertaine. On pourrait, dans notre cas, complexifier le modèle mais l'objectif développé ici est d'obtenir des informations inhérentes au système via l'approximation la plus poussée.

Si le modèle restreint s'avère utile dans de nombreux cas, l'hypothèse du corps de masse « nulle » ne peut cependant pas être posée dans tout problème. Le problème complet tient compte des interactions gravitationnelles entre chaque corps massif et permet de conserver l'ensemble des fréquences du système. L'apport de cette conservation de fréquences est notamment abordé dans le chapitre suivant consacré à la dynamique des satellites principaux.



## CHAPITRE 4

---

### Résonance 3 : 1 Miranda-Umbriel

---

La mission spatiale *Voyager 2*, dans les années 80', amena beaucoup de nouvelles données et images, notamment sur le système uranien. S'en suivirent de nombreuses études dynamiques afin d'expliquer, entre autres, les propriétés orbitales des satellites principaux [Dermott *et al.*, 1988; Malhotra, 1988; Tittemore et Wisdom, 1988, 1989, 1990; Malhotra et Dermott, 1990; Henrard et Sato, 1990]. Le principal résultat est une explication de l'inclinaison élevée de Miranda ( $4.338^\circ$ ) par une capture passée dans la résonance en moyen mouvement 3 : 1 avec Umbriel.

Pour des satellites au-delà de l'orbite synchrone et sans forte dissipation interne, les interactions des marées avec Uranus poussent les satellites vers l'extérieur (cf. Section 2.2.3), leur faisant rencontrer des zones de résonances orbitales. Une capture dans la résonance 3 : 1 avec Umbriel, et en particulier la résonance  $I^2$ , implique la hausse de l'inclinaison de Miranda, associée à une amplitude de libration de plus en plus grande de l'argument résonant. La sortie de la résonance suit une capture dans une résonance secondaire<sup>1</sup>. Les deux satellites reprennent alors leur évolution indépendamment l'un de l'autre.

Ce scénario d'évolution a été testé et étudié intensément par les auteurs précités. Je présente dans ce chapitre une actualisation des résultats via des outils numériques modernes permettant d'étudier un problème complet, contenant toutes les fréquences. Ceci mène à des résultats similaires et complémentaires

---

1. Par définition, une résonance secondaire intervient lorsque l'argument en libration d'une résonance primaire entre en résonance avec l'argument en circulation d'une résonance proche. Les résonances secondaires seront abordées en détails en fin de chapitre (cf. Sous-section 4.3.3).



de ceux élaborés il y a quelques années.

Ce chapitre est divisé en plusieurs sections détaillant en premier lieu les outils utilisés. Vient ensuite la présentation du modèle moyenné utilisé dans les références [Dermott *et al.*, 1988; Malhotra, 1988; Tittlemore et Wisdom, 1989; Malhotra et Dermott, 1990; Tittlemore et Wisdom, 1990]. Enfin, je présente les résultats obtenus pour le problème complet ainsi qu'une double approche des résonances secondaires. Suivant Henrard et Sato [1990], leur localisation sera approchée à l'équilibre via un modèle analytique des 3 corps restreint, modèle présenté au chapitre 3 sur les satellites intérieurs mais appliqué dans ce cas au système Uranus-Miranda-Umbriel. Les fréquences de libration seront définitivement déterminées par l'analyse en fréquences.

Je signale que cette approche analytique ne fait pas partie de la publication *A numerical exploration of Miranda's dynamical history*, son contenu ayant posé problème au *reviewer*. Selon moi, notre divergence de points de vue est associée à la manière d'aborder le problème suivant deux écoles différentes. Je pense que, dans le cadre de ce travail, cette approche vaut la peine d'être présentée, d'autant plus qu'elle est liée au modèle précédemment développé dans le chapitre 3.

Les conditions initiales de chaque application numérique au problème des N corps seront, à moins d'être spécifié autrement, celles définies dans les tableaux B.1, B.2 et B.3 présentés en annexe B.

## 4.1 Stabilité

La dynamique d'un système est liée au régime de stabilité ou de chaos dans lequel se trouve une orbite particulière. Dans le cadre d'un système de satellites en résonance, une zone chaotique est associée à la séparatrice et sépare les régimes libratoire et circulatoire. Pour le système uranien, Tittlemore et Wisdom [1988, 1989, 1990] présentent les espaces de phase des différents problèmes de résonance abordés sous la forme de surfaces de section de Poincaré appliquées à un Hamiltonien moyenné. Ils pointent l'évolution de la séparatrice chaotique et des îlots de stabilité à des temps fixés de l'évolution. Je propose de revisiter cette approche à l'aide d'un outil plus actuel : la stabilité dans le cas du problème complet à N corps est étudiée au moyen d'un détecteur de chaos. Nous verrons que cela apporte un nouvel éclairage à l'étude et que, combiné à d'autres méthodes, cela mène à de nouveaux résultats.

Les détecteurs de chaos permettent de déterminer la nature des orbites dans un système dynamique **conservatif**. Il en existe de plusieurs types : une famille regroupe les indicateurs de chaos dits *variationnels* dont le principe réside en

l'étude de la variation de vecteur(s) de déviation, tandis qu'une seconde famille regroupe les indicateurs dits *spectraux* qui se basent sur la décomposition des mouvements du système dynamique selon des termes périodiques. Les deux types sont abordés dans ce travail : le détecteur de chaos variationnel est largement utilisé tandis que l'indicateur spectral joue un rôle de renforcement des résultats quand cela est nécessaire.

#### 4.1.1 Indicateur variationnel : MEGNO

Un outil utilisé pour l'étude de la stabilité du problème est le détecteur de chaos **Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits** (MEGNO). Élaboré par Cincotta et Simò [2000], il a été largement testé et utilisé dans différents domaines. Citons, sans exhaustivité, Goździewski *et al.* [2001] ; Cincotta *et al.* [2003] ; Valk *et al.* [2009] ; Delsate [2011] ; Hubaux *et al.* [2013]. Un grand avantage de cet indicateur est sa dépendance en temps au travers d'un **unique** vecteur de déviation, facilitant sa mise en place et son utilisation.

Maffione *et al.* [2011] comparent différents détecteurs de chaos basés sur les vecteurs de déviation, comme par exemple l'indicateur de Lyapunov, le **Smaller Alignment Index** (SALI), le **Fast Lyapunov Indicator** (FLI), etc. Ils examinent pour chacun la possibilité de déterminer de manière efficace et définitive la nature chaotique ou non des trajectoires dans le cas de mappings symplectiques. Il en ressort que la meilleure technique est de combiner les différents détecteurs car ils ont chacun leurs spécificités, leurs forces et leurs faiblesses. Cependant, MEGNO semble prendre l'avantage dans certains cas particuliers : dans l'étude de trajectoires seules, MEGNO distingue correctement les mouvements réguliers des chaotiques, et ce, de manière aisée et rapide. Il permet dès lors de détecter des zones de chaos très rapidement mais nous verrons que, dans certains cas tels que la représentation précise des espaces de phase, MEGNO ne peut apporter l'ensemble de l'information et qu'il faudra alors passer à d'autres méthodes.

Pour une orbite donnée  $\gamma(t)$ , l'indicateur de chaos MEGNO est défini par Cincotta *et al.* [2003] :

$$Y(\gamma(t)) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(\gamma(s))}{\delta(\gamma(s))} s \, ds , \quad (4.1)$$

où  $\delta = \|\delta\|$  avec  $\delta$ , le vecteur tangent  $(\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p})$  du vecteur angle action  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  et  $\dot{\delta}$ , la dérivée par rapport au temps de  $\delta$ . Pratiquement, l'indicateur de chaos MEGNO est une version moyennée sur le temps de l'exposant caractéristique de Lyapunov  $\lambda$  qui donne une mesure de l'hyperbolicité (i.e. du taux de divergence

entre deux orbites) et qui est défini par (voir e.g. Benettin *et al.* [1980]) :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{||\delta(\gamma(t))||}{||\delta(\gamma(t_0))||} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(\gamma(s))}{\delta(\gamma(s))} ds .\end{aligned}\tag{4.2}$$

Bien que cet indicateur ait fait ses preuves dans de nombreuses applications (cf. Chapitre 5 de Morbidelli [2002] pour une review), le temps de convergence de la limite est assez long, d'où l'intérêt de l'introduction d'indicateurs tels que MEGNO qui fournit les informations sur un temps plus réduit et détermine les fines structures de l'espace de phase. Il donne également une bonne estimation de l'exposant maximal de Lyapunov.

En effet, considérant (4.1), le MEGNO moyen est défini par l'intégrale suivante :

$$\overline{Y}(\gamma(t)) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(s) ds ,$$

dont le comportement asymptotique est donné par :

$$\overline{Y}(t) \approx at + d ,$$

avec  $a = 0$  et  $d \approx 0$  dans le cas de mouvement périodique,  $a = 0$  et  $d \approx 2$  dans le cas de mouvement quasi-périodique et  $a = \lambda/2$  et  $d \approx 0$  dans le cas d'orbites irrégulières ou chaotiques,  $\lambda$  étant défini par (4.2) et pouvant être retrouvé via les moindres carrés ajustés sur  $\overline{Y}$ .

On résume donc rapidement le comportement de MEGNO moyen par [Cin-cotta *et al.*, 2003] :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{Y}(t) &= 0 : \text{trajectoire stable et périodique ,} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{Y}(t) &= 2 : \text{trajectoire stable et quasi-périodique ,} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{Y}(t)}{t} &= \frac{\lambda}{2} > 0 : \text{trajectoire chaotique .}\end{aligned}$$

L'implémentation de MEGNO et de sa valeur moyenne est assez aisée mais elle requiert l'intégration des équations du mouvement et des équations variationnelles en même temps et sur l'ensemble du système. Nous avons testé par ailleurs le calcul du MEGNO sur les degrés de liberté associés à chaque corps et il s'est avéré, comme suggéré par Hinse *et al.* [2010], que les résultats n'étaient pas identiques.

Pratiquement, MEGNO est calculé suivant la méthode présentée par Goździewski *et al.* [2001], qui propose une manière efficace de le calculer en ajoutant deux équations différentielles au système :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\dot{\boldsymbol{\delta}} \cdot \boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}} t \quad (4.3)$$

$$\frac{dw}{dt} = 2 \frac{y}{t} , \quad (4.4)$$

et en calculant, à chaque étape de l'intégration, MEGNO et sa forme moyennée par :

$$Y(t) = 2 \frac{y(t)}{t} \quad (4.5)$$

$$\overline{Y}(t) = \frac{w(t)}{t} . \quad (4.6)$$

Dans le cadre de l'application à un problème des N corps (cf. Chapitre 2), les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes sont décrites dans la sous-section 2.2.6. À ces équations du mouvement, il est nécessaire d'ajouter les équations variationnelles qui tiennent compte de l'évolution en fonction du temps du vecteur tangent  $\boldsymbol{\delta}$ . Cette évolution du vecteur tangent est obtenue par intégration de l'équation variationnelle :

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\delta}(t) = \mathcal{J}(\gamma(t)) \boldsymbol{\delta} ,$$

où  $\mathcal{J} = D\mathbf{v}$  est la matrice Jacobienne du champ de vecteur lié à la vitesse  $\mathbf{v}$ .

De nombreux tests de validation du détecteur ont été effectués. Certains résultats sont présentés dans l'annexe E. Ils comprennent une comparaison avec des résultats présentés dans Goździewski *et al.* [2001] et une application aux satellites d'Uranus dans le cadre d'un problème à 6 corps. Les résultats ont été comparés avec succès à ceux obtenus par le logiciel NIMASTEP, développé à Namur par Delsate N. et validé dans Delsate et Compère [2012].

### 4.1.2 Échelles orbitales

Outre le calcul de l'indicateur MEGNO, nous avons mis en place une autre méthode qui considère les variations des éléments orbitaux du satellite Miranda. Celle-ci fournira un complément d'information lors de l'analyse des espaces de phase. Elle se base sur l'idée des changements induits lors du passage entre régimes circulatoire et libratoire : la capture dans une résonance conduit en effet à des changements dans l'excentricité ou l'inclinaison de l'orbite lors du passage de la séparatrice. En revanche, au centre de la résonance, les variations sont négligeables : le changement est d'autant plus fort que la séparatrice est proche. Le nouvel indicateur appelé *échelle de variations des éléments orbitaux* est défini selon trois variations possibles :

1. la variation du demi-grand axe du satellite,  $\delta_a$  (km) ,
2. la variation de l'inclinaison du satellite,  $\delta_I$  (deg) ,
3. la variation en excentricité du satellite,  $\delta_e$  .

La variation de chaque élément est calculée comme la différence entre la plus grande et la plus petite valeur obtenues lors la simulation. Elle retient donc une certaine information de l'évolution temporelle des éléments orbitaux considérés.

### 4.1.3 Indicateur spectral

L'indicateur spectral décompose le mouvement des satellites en des termes périodiques et extrait une fréquence fondamentale. Usuellement, ce type d'analyse du signal est effectué par une décomposition en séries de Fourier : on peut alors obtenir des combinaisons entières de la fréquence fondamentale obtenue précédemment. Cette commensurabilité exacte entre les périodes ne se retrouvant en général pas en mécanique céleste, l'approche classique par les séries de Fourier est rendue impossible.

L'algorithme d'analyse en fréquences appelé NAFF pour **N**umerical **A**nalysis of the **F**undamental **F**requencies a donc été mis au point et développé par J. Laskar (Laskar [1993] pour la méthode, et Laskar [2005] pour les preuves de convergence). Elle permet d'identifier les coefficients  $a_k$  et  $\omega_k$  d'un signal complexe  $f(t)$  obtenu numériquement sur un intervalle de temps fini  $[-T; T]$  et vérifiant :

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n a_k \exp(i\omega_k t) ,$$

où  $\omega_k$  sont les fréquences réelles et  $a_k$ , les coefficients complexes. Si le signal  $f(t)$  est réel, son spectre des fréquences est symétrique et les amplitudes complexes, associées aux fréquences  $\omega_k$  et  $-\omega_k$ , sont conjuguées. Les fréquences et amplitudes associées sont obtenues via un schéma itératif. Afin de déterminer la première fréquence  $\omega_1$ , on cherche le maximum de l'amplitude de :

$$\phi(\omega) = \langle f(t), \exp(i\omega t) \rangle ,$$

où le produit scalaire  $\langle f(t), g(t) \rangle$  est défini par :

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) g(t)^* \chi(t) dt , \quad (4.7)$$

$g(t)^*$  étant le complexe conjugué de  $g(t)$ .  $\chi(t)$  est une fonction fenêtre de Hann ou de Hamming par exemple, i.e. une fonction positive vérifiant :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \chi(t) dt = 1 .$$

L'utilisation d'une telle fenêtre peut aider la détermination de la fréquence recherchée en réduisant l'amplitude du minimum secondaire dans la transformation (4.7). Son utilisation est optionnelle.

Une fois que le premier terme périodique  $\exp(i\omega_1 t)$  est trouvé, son amplitude complexe  $a_1$  est obtenue par projection orthogonale, et le processus peut recommencer sur le signal restant  $f_1(t) = f(t) - a_1 \exp(i\omega_1 t)$ .

L'algorithme s'arrête lorsque

- deux fréquences détectées sont proches l'une de l'autre, altérant leur détermination
- ou
- le nombre de termes détectés atteint la limite fixée par l'utilisateur.

Cet algorithme est très efficace, excepté lorsque deux fréquences sont proches l'une de l'autre. Dans ce cas, l'algorithme n'est pas suffisamment précis et s'arrête. Lorsque la différence entre deux fréquences est plus grande que deux fois la fréquence associée à la longueur totale de l'intervalle de temps, la détermination de chaque fréquence fondamentale n'est pas perturbée par les autres.

L'analyse en fréquences est notamment utile dans les deux cas suivants :

1. pour décrire une trajectoire quasi-périodique avec des séries convergentes, dans les cas d'étude de mouvement orbital [Vienne et Duriez, 1995] ou rotationnel [Noyelles *et al.*, 2008],
2. pour prouver la chaotité d'une trajectoire conservative (ou plus précisément la diffusion des fréquences) en montrant que les fréquences fondamentales sont dépendantes du temps [Laskar, 1993]. Dans ce contexte, NAFF est connu sous le nom FMA pour **F**requency **M**ap **A**nalysis.

Dans ce travail, la stabilité est étudiée avec l'indicateur MEGNO (sa valeur moyenne) et l'analyse en fréquences est utilisée dans le cadre de l'identification de fréquences quand cela est nécessaire. L'implémentation du code a été effectuée par Benoît Noyelles.

#### 4.1.4 Application à la résonance 3 : 1

L'indicateur de chaos MEGNO est utilisé afin de représenter l'espace de phase du système Uranus au moment de la résonance en inclinaison  $I^2$ . Je considère ici un problème non-dissipatif à 3 corps complet composé d'Uranus et ses 2 satellites, Miranda et Umbriel perturbés par le  $J_2$ , et calcule l'indicateur selon les définitions (4.5) et (4.6), le vecteur tangent initial étant choisi aléatoirement.

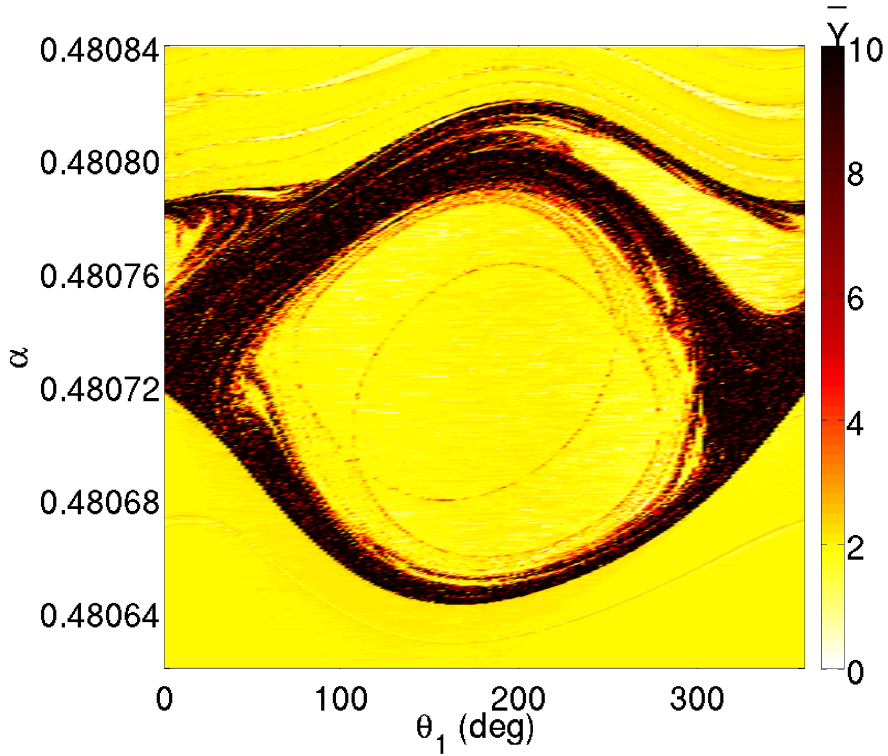


FIGURE 4.1 – Carte de chaos dans le plan rapport de demi-grands axes  $\alpha$  vs. argument résonant  $\theta_1$  résultant des intégrations numériques d'un problème non-dissipatif à 3 corps Uranus-Miranda-Umbriel avec l'intégrateur ABM sur 1 500 ans. Le pas d'intégration est de 1/80 jour. Les conditions initiales sont identiques aux actuelles (cf. Tables B.1, B.2 et B.3), excepté pour l'anomalie moyenne  $M$ , le demi-grand axe  $a$  et l'inclinaison  $I$  du satellite Miranda. Les deux premières variables sont respectivement dans les intervalles  $[0^\circ - 360^\circ[$  et  $[127845 \text{ km} - 127895 \text{ km}]$ . L'inclinaison initiale est  $4.8^\circ$ . On observe la large séparatrice chaotique de la résonance primaire mais également une séparatrice plus fine dans le centre de libration délimitant les zones de résonances secondaires.

Les deux satellites étant impliqués dans la résonance en moyen mouvement étudiée, il semble logique de se focaliser sur ceux-ci pour représenter l'espace de phase de cette résonance. Un espace de phase similaire sur un problème des 6 corps a également été réalisé afin de vérifier cette hypothèse : les points principaux de la dynamique globale sont conservés dans les deux situations. Nous en concluons que considérer un problème des 3 corps est suffisant pour

représenter l'évolution du système durant le passage dans la résonance 3 : 1.

La figure 4.1 est le résultat final de la simulation numérique : c'est une carte de chaos dans le plan rapport de demi-grands axes  $\alpha$  versus argument résonant  $\theta_1$  (1.1). La troisième dimension de l'espace de phase est donnée par une échelle de couleurs obtenue par la valeur moyenne de MEGNO  $\overline{Y}$ .

La carte est obtenue via  $10^5$  intégrations numériques sur 1 500 ans, chacune associée à une condition initiale de l'espace de phase. Cet intervalle de temps correspond approximativement à 100 périodes de régression du nœud de Miranda  $\Omega$ , qui est une période caractéristique du système. Le pas d'intégration est fixé selon notre intégrateur ABM autour de  $1/80^{\text{ième}}$  de la plus petite période des corps considérés dans la simulation : dans ce cas-ci, c'est la période de révolution de Miranda de 1.5 jour. La valeur du pas a été validée via un processus d'essais-erreurs.

Pour chaque simulation numérique, les solutions des équations du mouvement du problème des 3 corps complet et la valeur moyenne de MEGNO (4.6) sont calculées afin d'obtenir la troisième dimension via l'échelle de couleurs. Une région de conditions initiales ( $a \in [127\,845\text{ km} - 127\,895\text{ km}]$  et  $M \in [0^\circ - 360^\circ]$ ) est sélectionnée et couvre l'entière dynamique de la résonance  $I^2$  en particulier liée à l'angle résonant  $\theta_1$ .

L'indicateur identifie les structures chaotiques et stables de l'espace de phase (respectivement les couleurs foncées et claires) : il détecte en particulier la large séparatrice séparant le régime circulaire (à l'extérieur) du régime libratoire (à l'intérieur). La zone stable insérée dans cette séparatrice (en haut à droite) est une zone de libration d'un angle résonant succédant à celui étudié : il s'agit de la résonance  $II'$  dépendant des nœuds de Miranda et d'Umbriel. Les autres structures apparaissant dans les zones de circulation sont les résonances primaires 3 : 1 en excentricité  $\theta_i$ , avec  $i = 4, 5, 6$ . La visualisation de toutes ces structures sur un petit intervalle de rapports de demi-grands axes confirme l'étroitesse de la séparation entre les résonances du système, due au faible aplatissement de la planète, pouvant aller jusqu'au chevauchement des séparatrices.

L'indicateur MEGNO moyen identifie également une plus petite séparatrice définissant la frontière des zones de résonances secondaires. Il ne permet cependant pas de visualiser l'intérieur des zones stables qu'elle définit. C'est un des inconvénients de l'indicateur cité dans Maffione *et al.* [2011] : lorsque l'intégrateur est utilisé pour représenter des espaces de phase, il ne distingue pas les sous-structures d'une zone de stabilité car il ne conserve que la dernière valeur (dans ce cas-ci, la valeur égale 2) de l'évolution. On ne garde dès lors pas l'information dynamique contenue dans son évolution au cours du temps.



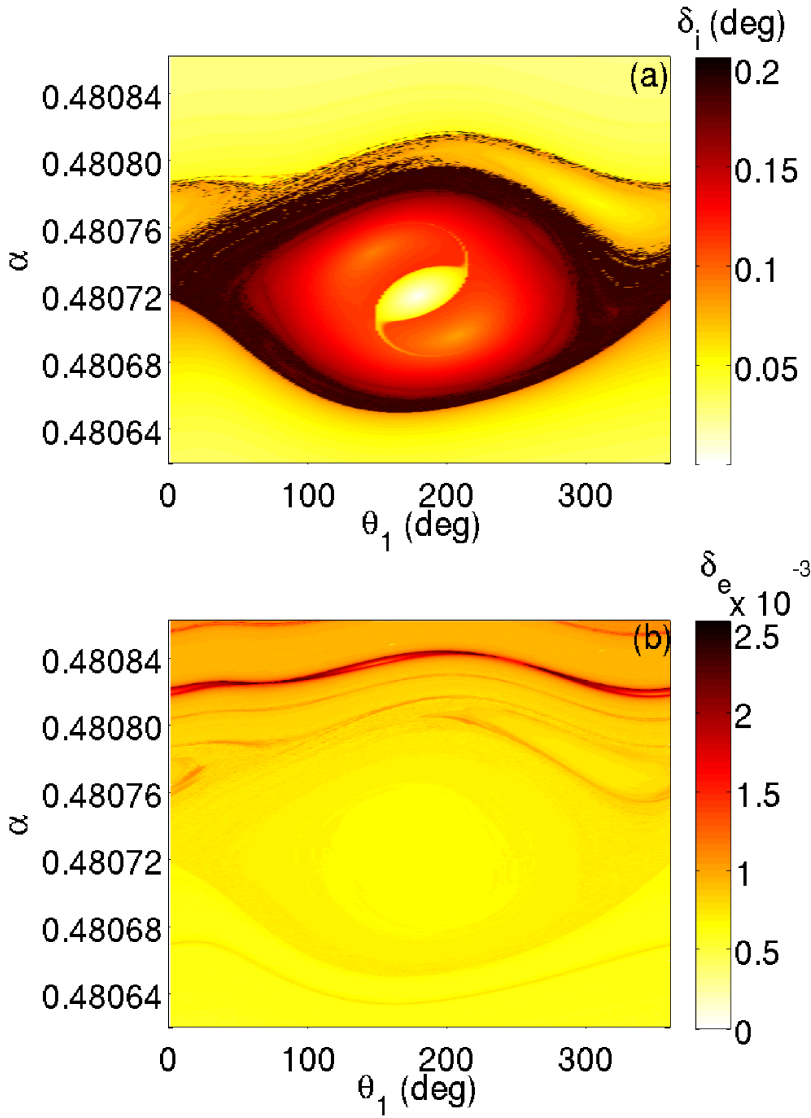


FIGURE 4.2 – Espaces de phase dans le plan rapport de demi-grand axes  $\alpha$  vs. argument résonant  $\theta_1$ . Le modèle, l'intégrateur, le pas d'intégration et les conditions initiales sont identiques à ceux de la figure 4.1 excepté pour l'intervalle du demi-grand axe de Miranda fixé à  $[127845 \text{ km} - 127905 \text{ km}]$  et pour l'inclinaison initiale  $I$  fixée à  $4.338^\circ$ . L'échelle de couleurs dépend de la variation de l'inclinaison (deg) (a) et de la variation en excentricité (b) de Miranda.

L'échelle basée sur la variation des éléments orbitaux contourne quelque peu cette faille : de par sa définition, la dernière valeur obtenue à la fin de chaque simulation s'étend sur une plus grande gamme de valeurs car elle tient compte des valeurs maximales et minimales obtenues au cours du temps. Ceci permet la visualisation de sous-structures parmi les zones stables. Le résultat avec les échelles de variation  $\delta_I$  et  $\delta_e$  définies à la sous-section 4.1.2 est donné à la figure 4.2. Le processus pour obtenir ces cartes est le même que celui présenté ci-dessus à l'exception de l'échelle de couleurs qui représente les variations des éléments orbitaux.

La figure 4.2 (a) présente « l'œil » de la résonance dans le domaine de rapport des demi-grands axes versus angle résonant. La couleur est donnée par la variation de l'inclinaison. On retrouve les éléments de la dynamique de la résonance (i.e. les zones de libration et de circulation) et on note les zones de résonances secondaires mieux définies avec une région plus stable à l'intérieur de celles-ci que dans le cas de la figure obtenue avec l'indicateur MEGNO moyen.

La figure 4.2 (b) présente le même résultat mais dans l'échelle de variation d'excentricité. On observe la même dynamique mais l'échelle de couleurs donne d'autres informations liées à une résonance en excentricité : alors que l'œil de la résonance avec les variations en inclinaison pour l'échelle de couleurs est bien apparent, il est presque effacé dans le cas d'une échelle en excentricité. De plus une autre structure qui n'apparaît pas dans la première carte (a) est présente dans la seconde (b) : c'est une résonance primaire impliquant le péri-centre d'Umbriel  $\varpi_U$ , la résonance primaire  $\theta_4$  (cf. Chapitre 1, Figure 1.3).

Ceci illustre l'intérêt de cette échelle qui associe la résonance impliquée à la variation de l'élément orbital.

## 4.2 Modèle moyenné

On connaît en mécanique céleste l'intérêt de développer des modèles moyennés : ils permettent l'étude de problèmes complexes à l'aide de modèles simplifiés disposant de moins de degrés de liberté. La moyennisation conserve les éléments à longues périodes en supprimant les courtes périodes  $\lambda_i$  qui ont tendance à « brouiller » la dynamique souhaitée et à allonger les temps de calcul.

Les théories moyennées dans le système uranien ont déjà été développées par différents auteurs il y a une vingtaine d'années. Tittlemore et Wisdom [1988] ont construit un Hamiltonien dans le cas excentrique plan et l'ont étendu dans le cas incliné circulaire [Tittlemore et Wisdom, 1989] en considérant l'interaction gravitationnelle, la perturbation résultante de l'aplatissement du corps central, les termes résonants et la perturbation due aux interactions séculaires entre les satellites. Ils obtiennent finalement un Hamiltonien en coordonnées

cartésiennes avec 4 degrés de liberté par l'addition des deux cas précédents. Malhotra et Dermott [1990] travaillent avec un Hamiltonien circulaire incliné ou excentrique plan séparément pour analyser le rôle des résonances secondaires dans la résonance en moyen mouvement 3 : 1 en inclinaison ou en excentricité respectivement.

Analytiquement, on étudie un problème des 3 corps **non-restreint** composé d'Uranus, de Miranda et d'Umbriel avec l'effet de l'aplatissement de la planète sur les satellites. Les équations du mouvement sont celles du N corps (cf. Section 2.2.6) avec  $N = 3$ . L'expression de l'Hamiltonien associé, sous une forme canonique, passe par l'introduction des variables de Jacobi qui repèrent chaque corps par rapport au centre de masse de tous les corps précédents (voir e.g. Duriez [2002]). Dans ces coordonnées, l'Hamiltonien du problème des 3 corps complet s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{Gm_0m}{2a} - \frac{Gm_0m'}{2a'} - Gmm' \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right] \\ & - \frac{Gm_0m}{r} \sum_{n=1}^2 J_{2n} \left( \frac{R_p}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) \\ & - \frac{Gm_0m'}{r'} \sum_{n=1}^2 J_{2n} \left( \frac{R_p}{r'} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi') , \end{aligned} \quad (4.8)$$

où la notation choisie au chapitre 1 est conservée, les variables non-primées correspondant au satellite le plus intérieur (i.e. Miranda). Les variables primées correspondent au satellite le plus extérieur, i.e. Umbriel. Cet Hamiltonien est constitué de deux problèmes des 2 corps, perturbés par le troisième corps et par l'aplatissement de la planète sur chacun des satellites. Cet aplatissement ne tient compte que des harmoniques sphériques connues  $J_2$  et  $J_4$  pour Uranus. L'Hamiltonien (4.8) contient toutes les courtes périodes : l'objectif est donc de développer les perturbations, d'éliminer les courtes périodes et d'écrire  $\mathcal{H}$  sous une forme moyennée.

La perturbation séculaire considérant le coefficient  $J_2$  pour l'effet d'aplatissement a déjà été introduite au chapitre 3. Nous reprenons dès lors l'expression (3.7) qui sera appliquée sur les deux satellites de manière uniforme puisque le problème est non-restreint.

De même, la perturbation due au troisième corps est introduite au chapitre 3 via le développement en polynômes de Legendre. Nous repartons avec l'expression (3.13) développée au second degré en excentricité et inclinaison via les séries de Fourier et appliquée au cas d'un 3 corps complet. L'Hamiltonien en

coordonnées de Jacobi est donné par (voir e.g. Malhotra [1988]) :

$$\mathcal{H}_{int} = -\frac{Gmm'}{a'} \left( \frac{1}{2} b_{1/2}^0(\alpha) + \sum_{(l)=(l_1, \dots, l_6)} S_{(l)} \cos \kappa \right), \quad (4.9)$$

où le terme  $b_{1/2}^0(\alpha)$  est un coefficient de Laplace. Celui-ci dépend du rapport des demi-grands axes  $\alpha = a/a'$ , avec  $a \ll a'$ . Dans ce travail, les coefficients de Laplace sont numériquement calculés pour  $\alpha$  constant par l'intégrale (voir e.g. Murray et Dermott [1999]) :

$$b_i^j(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^i} d\psi. \quad (4.10)$$

L'angle  $\kappa$  dans (4.9) est défini par (3.14). La fonction  $S_{(l)}$  dépend des coefficients de Laplace, des excentricités et des inclinaisons et s'écrit sous la forme :

$$S_{(l)} = f_{(l)} e^{|l_3|} e'^{|l_4|} \gamma^{|l_5|} \gamma'^{|l_6|}, \quad (4.11)$$

avec  $\gamma = \sin \frac{I}{2}$ ,  $\gamma' = \sin \frac{I'}{2}$  et  $l_j$   $j = 1, \dots, 6$  satisfaisant la relation (3.15). Les expressions  $f_{(l)}$  sont des fonctions de coefficients de Laplace. Appliqué à la résonance 3 : 1, on fixe les constantes  $l_1 = -3$  et  $l_2 = 1$ . Chaque  $f_{(l)} = F_i$  est associé à l'angle résonant  $\theta_i$  défini par  $l_j$ ,  $j = 3, \dots, 6$  dans le développement classique au second degré donné dans Murray et Dermott [1999]. L'Hamiltonien résonant s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{res} = & -\frac{Gmm'}{a'} \\ & \times \left\{ \gamma^2 F_1(\alpha) \cos(\theta_1) + \gamma\gamma' F_2(\alpha) \cos(\theta_2) + \gamma'^2 F_3(\alpha) \cos(\theta_3) \right. \\ & \left. + e'^2 F_4(\alpha) \cos(\theta_4) + ee' F_5(\alpha) \cos(\theta_5) + e^2 F_6(\alpha) \cos(\theta_6) \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où, pour  $l_j$   $j = 3, \dots, 6$ , les  $F_i$   $i = 1, \dots, 6$  sont définis par :

$\theta$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_6$	$F_i(\alpha)$	
$\theta_1$	0	0	2	0	$\frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^2(\alpha)$	(4.13)
$\theta_2$	0	0	1	1	$-\alpha b_{3/2}^2(\alpha)$	
$\theta_3$	0	0	0	2	$\frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^2(\alpha)$	
$\theta_4$	0	2	0	0	$\frac{1}{8} \left( 17 + 10 \alpha D + \alpha^2 D^2 \right) b_{1/2}^1(\alpha)$	
$\theta_5$	1	1	0	0	$-\frac{1}{4} \left( 20 + 10 \alpha D + \alpha^2 D^2 \right) b_{1/2}^2(\alpha)$	
$\theta_6$	2	0	0	0	$\frac{1}{8} \left( 21 + 10 \alpha D + \alpha^2 D^2 \right) b_{1/2}^3(\alpha)$	

avec  $D$  et  $D^2$ , les opérateurs différentiels par rapport à  $\alpha$  de premier et second ordres.

La partie séculaire est contenue dans l'Hamiltonien d'interaction  $\mathcal{H}_{int}$  (4.9) et est obtenue en considérant les termes indépendants et ceux associés aux angles séculaires comprenant les différences des nœuds et péricentres ( $l_1 = 0$  et  $l_2 = 0$  dans l'angle  $\kappa$  (4.9)) du développement au second degré du potentiel perturbateur en excentricité et inclinaison :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{sec} = & -\frac{Gmm'}{a'} \\ & \times \left\{ G_0(\alpha) + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) G_1(\alpha) + (\gamma^2 + \gamma'^2) G_2(\alpha) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} ee' G_3(\alpha) \cos(\omega' - \omega) + \gamma \gamma' G_4(\alpha) \cos(\Omega' - \Omega) \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $G_i$  sont des fonctions de coefficients de Laplace données par :

$$\begin{aligned} G_0(\alpha) &= \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^0(\alpha) \\ G_1(\alpha) &= (2\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^0(\alpha) \\ G_2(\alpha) &= -\frac{\alpha}{2} b_{\frac{3}{2}}^1(\alpha) \\ G_3(\alpha) &= \alpha b_{\frac{3}{2}}^1(\alpha) \\ G_4(\alpha) &= (2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{\frac{1}{2}}^1(\alpha). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Par les expressions (3.7), (4.12) et (4.14), l'Hamiltonien (4.8) est décomposé sous la forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_k + \mathcal{H}_{J_2} + \mathcal{H}_{res} + \mathcal{H}_{sec}, \quad (4.16)$$

séparant la partie keplerienne, les effets de l'aplatissement, l'Hamiltonien résonant et le séculaire,  $\mathcal{H}_k$  étant l'Hamiltonien reprenant la somme des deux problèmes des 2 corps.

On note que les termes de  $\mathcal{H}_{res}$  et  $\mathcal{H}_{sec}$  sont découplés entre les inclinaisons et les excentricités (i.e. il n'y a pas de terme type «  $\gamma e$  ») permettant de subdiviser l'approche analytique en un problème incliné circulaire et un problème plan excentrique lorsque le développement est effectué au second degré.

### 4.2.1 Modèle incliné

L'objectif étant d'étudier l'augmentation en inclinaison de Miranda, on présente ici le cas circulaire incliné, le modèle excentrique étant présenté en annexe F. Les excentricités  $e$  et  $e'$  sont dès lors mises à zéro dans l'expression de l'Hamiltonien (4.16).

L'étape suivante du développement consiste en l'expression de cet Hamiltonien (4.16) dans un ensemble de variables canoniques, par exemple les éléments de Delaunay modifiés (3.10), avec dans le cas non-restreint :

$$L = m \sqrt{\mu a} ,$$

l'expression primée étant équivalente.

Suivant un processus similaire à celui détaillé dans le chapitre 3, un nouvel ensemble canonique de variables résonantes  $(\theta_M, \theta_U, J_M, J_U)$ , avec les indices  $M$  et  $U$  pour Miranda et Umbriel respectivement, est posé [Malhotra et Dermott, 1990] :

$$\theta_M = \frac{1}{2}\theta_1 \quad (4.17)$$

$$\theta_U = \frac{1}{2}\theta_3 \quad (4.18)$$

$$J_M = \frac{1}{2} m \sqrt{Gm_0 a} I^2 \quad (4.19)$$

$$J_U = \frac{1}{2} m' \sqrt{Gm_0 a'} I'^2 , \quad (4.20)$$

et définit un Hamiltonien à deux degrés de liberté écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \nu_1 J_M + \nu_2 J_U - \beta (J_M + J_U)^2 \\ &+ 2\xi_1 J_M \cos 2\theta_M + 2\xi_2 (J_M J_U)^{1/2} \cos(\theta_M + \theta_U) \\ &+ 2\xi_3 J_U \cos 2\theta_U + 2\xi_4 (J_M J_U)^{1/2} \cos(\theta_M - \theta_U) , \end{aligned} \quad (4.21)$$

$\theta_i$ ,  $i = M/U$  étant les angles résonants pour la résonance 3 : 1 en inclinaison entre Miranda et Umbriel et  $J_i$ , les variables associées données au plus petit ordre en masse et inclinaison. Le troisième angle de la résonance en inclinaison  $\theta_2$  intervient comme combinaison linéaire des angles  $\theta_M$  et  $\theta_U$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} \\ &= \theta_M + \theta_U , \end{aligned}$$

limitant le nombre de degrés de liberté de l'Hamiltonien. L'angle lié au coefficient  $\xi_4$  est le terme séculaire de l'Hamiltonien et comprend la différence des noeuds de Miranda et Umbriel écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \Omega_U - \Omega_M &= \frac{\theta_1 - \theta_3}{2} \\ &= \theta_M - \theta_U . \end{aligned}$$

Le mouvement est décrit par les équations d'Hamilton-Jacobi (3.1) données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_M &= \nu_1 - 2\beta (J_M + J_U) + 2\xi_1 \cos 2\theta_M \\
 &\quad + \xi_2 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_U \cos(\theta_M + \theta_U) + \xi_4 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_U \cos(\theta_M - \theta_U) \\
 \dot{\theta}_U &= \nu_2 - 2\beta (J_M + J_U) + \xi_2 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_M \cos(\theta_M + \theta_U) \\
 &\quad + 2\xi_3 \cos 2\theta_U + \xi_4 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_M \cos(\theta_M - \theta_U) \\
 \dot{J}_M &= 4\xi_1 J_M \sin 2\theta_M + 2\xi_2 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M + \theta_U) + 2\xi_4 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M - \theta_U) \\
 \dot{J}_U &= 2\xi_2 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M + \theta_U) + 4 \xi_3 J_U \sin 2\theta_U - 2\xi_4 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M - \theta_U) .
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dans les notations de Malhotra [1988], les paramètres dépendants du problème sont définis par :

$$\nu_1 = \nu_0 + \Delta\nu_1 \quad \nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu_2 ,$$

avec

$$\begin{aligned}
 \nu_0 &= \frac{1}{2} \left\{ 3n' \left[ 1 + 3J_2 \left( \frac{R_p}{a'} \right)^2 + \frac{m}{m_0} \left( 1 + \alpha \frac{d}{d\alpha} \right) b_{1/2}^{(0)}(\alpha) \right] \right. \\
 &\quad \left. - n \left[ 1 + 3J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{m'}{m_0} \alpha^2 \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^{(0)}(\alpha) \right] \right\} ,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Delta\nu_1 &= \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m'}{m_0} \alpha^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \right] n \\
 \Delta\nu_2 &= \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a'} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{m_0} \alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \right] n' ,
 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{3}{8} \left( 1 + 9 \frac{m/m'}{\alpha} \right) \frac{1}{m a^2} .$$

L'expression  $\nu_0 = 0$  correspond à la commensurabilité 3 : 1 exacte entre les moyens mouvements de Miranda et d'Umbriel, et les  $\Delta\nu_i$  sont les corrections des vitesses de précession séculaire des nœuds  $\Omega$  et  $\Omega'$  sur la combinaison résonante des moyens mouvements des satellites.

Nous définissons également les expressions des  $\xi_i$  liées à la résonance en inclinaison  $I^2$  [Malhotra et Dermott, 1990] :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -\frac{n}{4} \frac{m'}{m_0} \alpha F_1(\alpha) \\ \xi_2 &= -\frac{n}{4} \left[ \frac{m}{m_0} \frac{m'}{m_0} \right]^{1/2} \alpha^{5/4} F_2(\alpha) \\ \xi_3 &= -\frac{n}{4} \frac{m}{m_0} \alpha^{3/2} F_3(\alpha) \\ \xi_4 &= -\frac{n}{4} \left[ \frac{m}{m_0} \frac{m'}{m_0} \right]^{1/2} \alpha^{5/4} G_4(\alpha) ,\end{aligned}$$

où les expressions pour  $F_i(\alpha)$   $i = 1, \dots, 3$  sont définies par (4.13) et  $G_4(\alpha)$  dans (4.15).

### 4.2.2 Application à la résonance 3 : 1

Le modèle moyenné, en approximation circulaire inclinée, est appliqué au système non-dissipatif à 3 corps composé d'Uranus, Miranda, Umbriel avec effet du  $J_2$  en résonance en moyen mouvement 3 : 1. Il est validé par comparaison avec les résultats obtenus à la figure 4.3. Pour ce faire, on implémente le même processus qu'expliqué à la section 4.1.2 sur le problème moyen décrit ci-dessus. On considère un pas d'intégration plus grand dans ce cas-ci que dans le cas complet puisque les courtes périodes ont été moyennées. Suivant le même processus d'essais-erreurs que pour le 3 corps complet, le pas d'intégration est fixé à 1/300<sup>ième</sup> de la période du nœud relative au satellite le plus proche de la planète, la période de 17 ans associée au nœud de Miranda.

La figure 4.3 donne l'œil de résonance obtenu par intégrations numériques des équations du mouvement (4.22) du modèle moyenné avec les variations en inclinaison en degrés pour l'échelle de couleurs dans le plan rapport des demi-grand axes  $\alpha$  vs. argument résonant  $\theta_1 = 2\theta_M$ . Par comparaison avec la figure 4.1, on observe que bien que l'œil de la résonance principale  $I^2$  reste  $2\pi$ -périodique entre les approches complète et moyenne, l'œil de la résonance  $II'$  présent dans la séparatrice principale a doublé sa période dans l'approche moyennée par rapport à la modélisation du 3 corps complet. Ceci s'explique par la définition des angles qui n'est pas la même dans les deux approches.



En effet, alors que dans le 3 corps complet l'angle de la résonance mixte est donné par :

$$\theta_1 + \theta_3 = 2\lambda - 6\lambda' + 2\Omega + 2\Omega' ,$$

et est  $2\pi$ -périodique, le même angle dans le cas moyenné s'exprime par :

$$\theta_M + \theta_U = \lambda - 3\lambda' + \Omega + \Omega' ,$$

et présente une période deux fois plus longue.

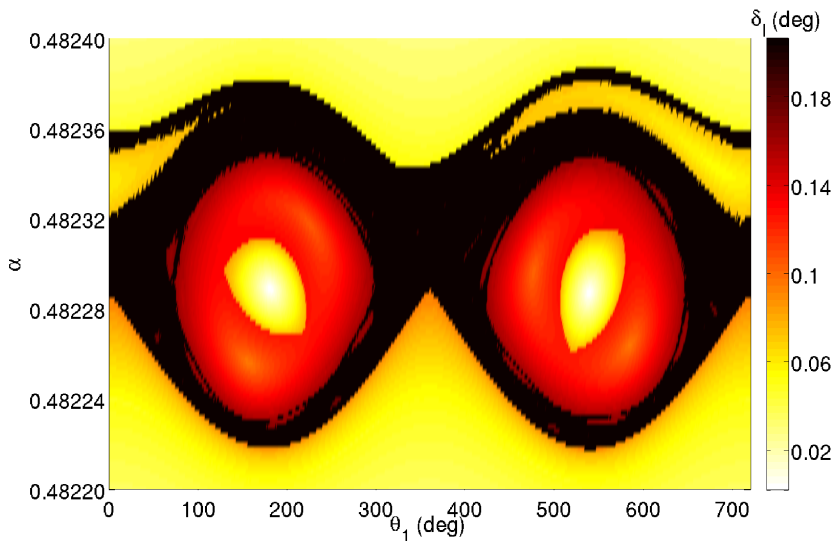


FIGURE 4.3 – Espace de phase dans le plan rapport des demi-grands axes  $\alpha$  vs. argument résonant  $\theta_1$  dans le cas du problème moyenné. Les conditions initiales en demi-grand axe sont fixées entre [128 268 km – 128 318 km] et reflètent le décalage du centre de libration. Les conditions initiales pour l'argument résonant  $\theta_1$  sont fixées entre  $[0^\circ - 720^\circ]$ . L'intégrateur est l'ABM et le pas d'intégration est fixé à 17/300 année. L'inclinaison initiale est fixée à  $4.338^\circ$ . L'échelle de couleurs dépend de la variation de l'inclinaison en degré.

Si on se concentre uniquement sur la première période de  $2\pi$  de la figure 4.3, on observe par comparaison avec la figure 4.2 (a) que les deux yeux sont similaires : nous distinguons les zones de libration et de circulation et la zone stable pour la résonance mixte  $\theta_2$  apparaît également dans les deux modèles. Les zones de résonances secondaires sont visibles dans les deux figures et confirment la possibilité de leur étude avec le modèle moyenné. Il est évident que les détails et les précisions de l'œil dans le modèle complet sont « floutés » dans le problème moyenné mais la dynamique générale est bien représentée avec l'approximation.

Notons que les deux échelles de couleurs sont identiques car la dynamique de l'inclinaison est dirigée par l'argument résonant (ou quasi-résonant à l'extérieur de la séparatrice) présent dans les deux systèmes. La vérification de cette hypothèse a été réalisée par l'algorithme NAFF présenté à la section 4.1.3. Il en résulte que les variations de l'inclinaison ont les mêmes périodes que l'angle résonant dans les deux problèmes.

La comparaison entre les deux figures 4.2 (a) et 4.3 s'avère valable mais on note toutefois un décalage du centre de la résonance. En effet, les deux intervalles de demi-grands axes pour Miranda ne sont pas les mêmes dans les deux problèmes. Ce décalage s'explique par les définitions des variables  $J_M$  (4.19) et  $J_U$  (4.20) qui impliquent que les définitions des demi-grands axes de Miranda et d'Umbriel dans le problème moyenné diffèrent respectivement d'une quantité d'ordre  $\gamma^2$  et  $\gamma'^2$  par rapport au problème complet. Ceci devient important dans le cas où l'inclinaison augmente. Basé sur le deuxième chapitre de Malhotra [1988], nous montrons pour Miranda que :

$$\sqrt{\bar{a}} = \frac{\sqrt{a} (1 - 3 \gamma'^2) + \sqrt{a'} \alpha^{-1} \gamma'^2}{(1 - \gamma^2 + 3 \gamma'^2 \gamma'^2)}, \quad (4.23)$$

où  $\bar{a}$  est le demi-grand axe de Miranda dans le problème moyenné. La figure 4.4 montre le décalage de l'œil de la résonance en fonction de l'augmentation de l'inclinaison de Miranda  $I$  qui devient significative lorsque l'inclinaison est élevée.

Aborder le problème moyenné dans ce chapitre avait pour objectif de présenter une partie des résultats antécédents (Tittlemore et Wisdom 1988, 1989, 1990; Malhotra et Dermott 1990). Notre apport est basé sur une analyse plus poussée des résonances secondaires du problème de la résonance en moyen mouvement 3 : 1. Il nécessite l'ensemble des fréquences du problème. Nous conservons dès lors l'approche du 3 corps complet (Uranus, Miranda, Umbriel avec effet du  $J_2$ ) et n'utiliserons pas sa version moyennée. Il sera cependant repris au chapitre 5 avec un Hamiltonien à 4 degrés de liberté combinant les problèmes incliné et excentrique.

## 4.3 Évolution à l'intérieur de la résonance

Les sections précédentes ont présenté les modèles du problème de la résonance en moyen mouvement 3 : 1 entre Miranda et Umbriel, sous ses formes complète et moyennée. Des outils numériques pour l'étudier de manière précise ont également été développés. On présente désormais l'application via le problème des 3 corps Uranus-Miranda-Umbriel afin d'expliquer la haute inclinaison de Miranda.

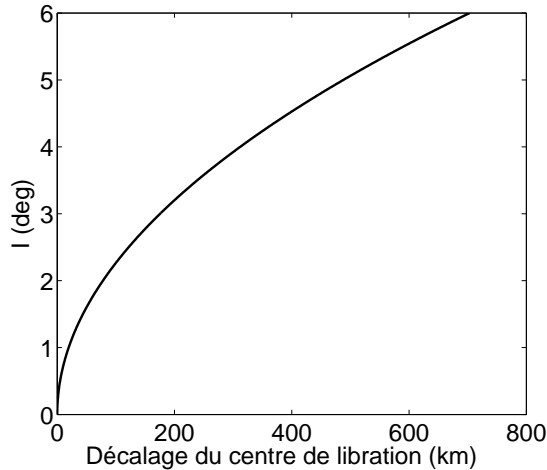


FIGURE 4.4 – Demi-grand axe moyen de Miranda  $\bar{a}$  en fonction de l’inclinaison de Miranda  $I$  (deg). La condition initiale pour le demi-grand axe de Miranda est fixée dans l’équation (4.23) au centre de la libration dans le modèle complet i.e.  $a = 127\,870$  km. Les valeurs du demi-grand axe d’Umbriel  $a'$  et de son inclinaison  $I'$  sont les actuelles fixées dans la table B.3 présentée en annexe B. Le décalage du centre de libration entre les deux modèles augmente avec l’inclinaison selon une loi de puissance.

Les résultats sont présentés sous deux formes : la première regroupe des trajectoires du système dissipatif qui évoluent sur de larges intervalles de temps, typiquement  $10^6$  années. La dissipation considérée est impliquée par l’effet de marées et sera modélisée par les équations de Kaula (2.8). La deuxième représente l’évolution globale par des cartes dépendantes de l’échelle de couleurs MEGNO moyen pour représenter la séparatrice, ou dépendantes des variations des éléments orbitaux, principalement celle en inclinaison pour étudier la résonance de manière plus détaillée. Dans ce cas, l’espace de phase est représenté dans un plan rapport des demi-grands axes versus argument résonant, déterminé par un ensemble d’intégrations numériques sur 1 500 années sans dissipation.

En résumé, utilisant de nouveaux outils numériques, nous présentons ici différents résultats qui confirment ceux de Tittlemore et Wisdom [1990] et Malhotra et Dermott [1990] mais les étendons également. Nous mettons notamment en avant une représentation des zones de résonances secondaires avec notre échelle de variations des éléments orbitaux sur le problème de la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel et identifions les arguments en libration.

### 4.3.1 Suivi d'une trajectoire du système dissipatif

Analysons, dans cette section, l'évolution d'une trajectoire du système dissipatif lors de sa capture en résonance en moyen mouvement 3 : 1. Les équations du mouvement découlent du problème complet (cf. Section 2.2.6) avec  $N = 3$ . Les conditions initiales de la simulation sont les éléments orbitaux actuels, excepté pour les demi-grands axes de Miranda et d'Umbriel et pour l'inclinaison de Miranda qui sont fixés à des valeurs plus petites.

L'effet dissipatif sur le système est celui de marée sur les demi-grands axes et les excentricités de Miranda et d'Umbriel, décrit par les équations séculaires de Kaula (2.8). Le problème habituel dans l'étude de cette dissipation est la détermination du rapport de dissipation  $k_2/Q$  pour la planète et les satellites dont les valeurs ne sont pas connues. De récentes études dans les cas de Jupiter et de Saturne suggèrent cependant des valeurs assez grandes :  $(k_2/Q)_p = (1.102 \pm 0.203) 10^{-5}$  dans le cas de Jupiter [Lainey *et al.*, 2009] et de  $(k_2/Q)_p = (2.3 \pm 0.7) 10^{-4}$  pour Saturne [Lainey *et al.*, 2012] ont notamment été avancées.

Dans le cas d'Uranus, mentionnons les travaux plus anciens de Gavrilov et Zharkov [1977] et Goldreich et Soter [1966] qui donnent une borne supérieure avec  $(k_2/Q)_p = 2.08 10^{-5}$ , considérant la migration de Miranda d'une orbite synchrone jusqu'à sa position actuelle sur  $4.5 10^9$  années. La borne inférieure est donnée par Tittlemore et Wisdom [1989] avec  $(k_2/Q)_p = 2.67 10^{-6}$  supposant le passage de Miranda dans la résonance 3 : 1 avec Umbriel. Très récemment, Emelyanov et Nikonchuk [2013] ont observé une accélération dans les longitudes moyennes des satellites principaux qui pourrait caractériser une dissipation. Les valeurs numériques pour les rapports  $(k_2/Q)_p$  et  $(k_2/Q)_s$  ne sont cependant pas fournies mais pourraient être estimées.

Pour fixer le rapport  $(k_2/Q)_p$ , un ensemble de tests avec différentes valeurs de ce paramètre a été effectué et nous notons des comportements similaires sur différentes échelles de temps (cf. Figure 4.5) donnant une sortie de la résonance primaire  $I^2$  aux alentours de  $4^\circ$ . À noter que nous avons souvent travaillé avec la valeur d'inclinaison actuelle de  $4.338^\circ$  mais nos résultats fournissant une valeur proche de l'actuelle ( $\sim 4^\circ$ ) sont tout aussi valables.

La valeur de  $(k_2/Q)_p = 5.2 10^{-3}$  est choisie pour la planète car cela produit rapidement une augmentation de l'inclinaison proche de la valeur actuelle permettant d'étudier le processus d'évolution avec le problème complet dans un temps CPU modéré. Notons que le renforcement du rapport  $(k_2/Q)_p$  a pour effet une modification de l'échelle de temps de la simulation.

Évidemment le rapport est assez élevé et on suppose qu'il est renforcé par comparaison avec sa valeur exacte : le renforcement de ce paramètre  $k_2/Q$

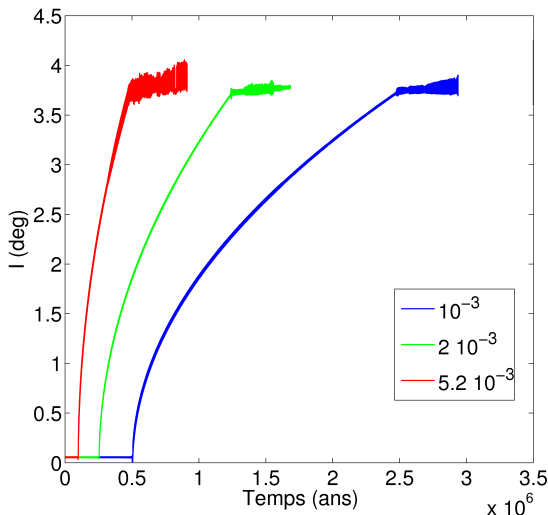


FIGURE 4.5 – Évolution de l'inclinaison de Miranda (deg) versus le temps (ans) selon différents rapports de  $(k_2/Q)_p$ .

augmente la vitesse de l'évolution à condition que les trajectoires restent adiabatiques. Malhotra [1991] explique cette évolution adiabatique selon l'échelle dynamique caractéristique  $\tau$ . Cette échelle  $\tau$  due aux effets de dissipation est écrite comme [Malhotra, 1991] :

$$\begin{aligned} \tau &= \left( \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)^{-1} \\ &\approx 10^{12} \text{ans} , \end{aligned} \tag{4.24}$$

où  $\omega$  est une fréquence caractéristique associée à l'angle de la résonance exacte  $\lambda - 3\lambda'$  et,  $\dot{\omega}$ , sa dérivée. La variable  $\tau$  caractérise l'évolution de la fréquence résonante. Par comparaison avec la figure 1.3, les périodes des arguments résonnants sont plus petites que l'échelle de temps caractéristique. Nous concluons que l'évolution reste adiabatique avec le choix de  $(k_2/Q)_p = 5.2 \cdot 10^{-3}$ .

Le choix du rapport  $(k_2/Q)_s$  pour chaque satellite importe peu car on ne considère pas de fortes dissipations dans les satellites. Dans ce cas, le terme prédominant dans les équations (2.8) est celui contenant la dissipation de la planète. On suppose cependant un facteur de dissipation  $Q$  plus petit pour Miranda que pour Umbriel puisque Miranda présente des signes d'évolution interne thermique plus important [Smith *et al.*, 1986]. Tous ces points seront revisités au chapitre 5.

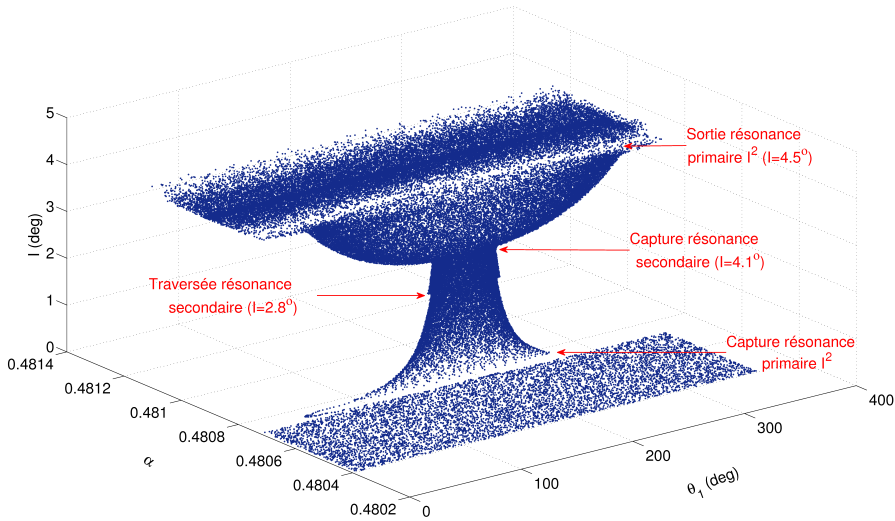


FIGURE 4.6 – Évolution de l'argument résonant  $\theta_1$  vs. le rapport de demi-grands axes  $a/a'$  vs. l'inclinaison de Miranda  $I$ . Les conditions initiales sont les actuelles, excepté pour le demi-grand axe d'Umbriel  $a' = 265200$  km, le demi-grand axe de Miranda,  $a = 127400$  km qui évoluent avec l'effet de marée sur les demi-grands axes et les excentricités. L'inclinaison initiale de Miranda est choisie à une petite valeur ( $I = 0.001^\circ$ ). Le pas d'intégration est de 1/60 jour. Les rapports  $(k_2/Q)_p = 5.2 \cdot 10^{-3}$  et  $(k_2/Q)_s = 10^{-4}$ . On note une capture dans la résonance primaire lorsqu'on approche de la commensurabilité 3 : 1, ayant comme conséquence une augmentation de l'inclinaison de Miranda. On observe également la sortie de la résonance primaire impliquée par une suite de traversées/captures de résonances secondaires.

La figure 4.6 donne l'évolution de l'argument résonant  $\theta_1$  pendant la capture dans la résonance. On observe dans un premier temps une circulation de l'angle  $\theta_1$ . La capture dans la résonance  $I^2$  a lieu lorsque la commensurabilité 3 : 1 entre les demi-grands axes est approchée, correspondant à une valeur :

$$\begin{aligned} \frac{a}{a'} &= 0.4807 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Dans un second temps, on entre dans une phase de libration pendant laquelle l'inclinaison de Miranda augmente. Durant cette phase, la trajectoire est capturée dans des zones de résonances secondaires (cf. Section 4.3.3 pour plus de détails) impliquant la sortie de la zone de résonance à une inclinaison proche de  $4.5^\circ$ . Les points critiques de traversée de résonances secondaires, identiques

à ceux trouvés par Malhotra et Dermott [1990], sont caractérisés par des valeurs en inclinaison de  $2.8^\circ$ ,  $4.1^\circ$  et  $4.5^\circ$  respectivement.

### 4.3.2 Évolution globale via espaces de phase

Les représentations en trois dimensions de l'espace de phase (rapport des demi-grands axes versus argument résonant avec une échelle de couleurs) ne sont pas suffisantes pour représenter la dynamique entière puisque cette dynamique évolue avec l'augmentation de l'inclinaison de Miranda. En particulier, le chaos dans le système augmente avec l'inclinaison de Miranda [Tittlemore et Wisdom, 1989]. La dynamique dans son ensemble est donc présentée par un ensemble successif de cartes dans l'échelle de couleurs de variation en demi-grand axe de Miranda résultant de l'intégration numérique du problème complet à 3 corps.

La figure 4.7 montre un ensemble de 6 plans, rapport des demi-grands axes  $\alpha$  versus argument résonant  $\theta_1$  avec la variation du demi-grand axe pour l'échelle de couleurs. Les inclinaisons initiales de Miranda sont  $1^\circ$ ,  $2.1^\circ$ ,  $2.8^\circ$ ,  $4.1^\circ$ ,  $4.338^\circ$  et,  $4.8^\circ$  respectivement. La condition initiale de  $4.338^\circ$  est choisie parce que c'est la valeur de l'inclinaison de Miranda observée actuellement.

Lorsque l'inclinaison augmente, la séparatrice s'élargit en une couche chaotique, en particulier lorsque les deux résonances se rencontrent. Cette augmentation de chaos, causée par le chevauchement de deux séparatrices proches, est conséquente du faible aplatissement d'Uranus illustré par la proximité des résonances. Cet élargissement de la couche chaotique associé à l'augmentation en inclinaison est également représenté par Moons et Henrard [1994] via une représentation des positions des résonances primaire et secondaires à l'équilibre dans un plan  $(\alpha, I)$  (cf. Figure 9 dans Moons et Henrard [1994]).

Les différentes zones de l'espace des phases évoluent également et, en particulier, le centre de libration présente différentes structures se déplaçant avec le temps : on distingue des résonances secondaires qui apparaissent et se déplacent avec l'augmentation en inclinaison. Certaines d'entre elles ont été détectées par Tittlemore et Wisdom [1990] et étudiées intensivement par Malhotra et Dermott [1990] et par Moons et Henrard [1994].

La figure 4.8 montre un agrandissement du centre de l'œil lorsque l'inclinaison de Miranda est fixée à  $4.338^\circ$ . On distingue clairement 3 zones : le centre de libration et deux autres zones entourant le centre, ces zones semblant jouer un rôle important dans l'évolution et étant les objets d'étude de la fin de ce chapitre.

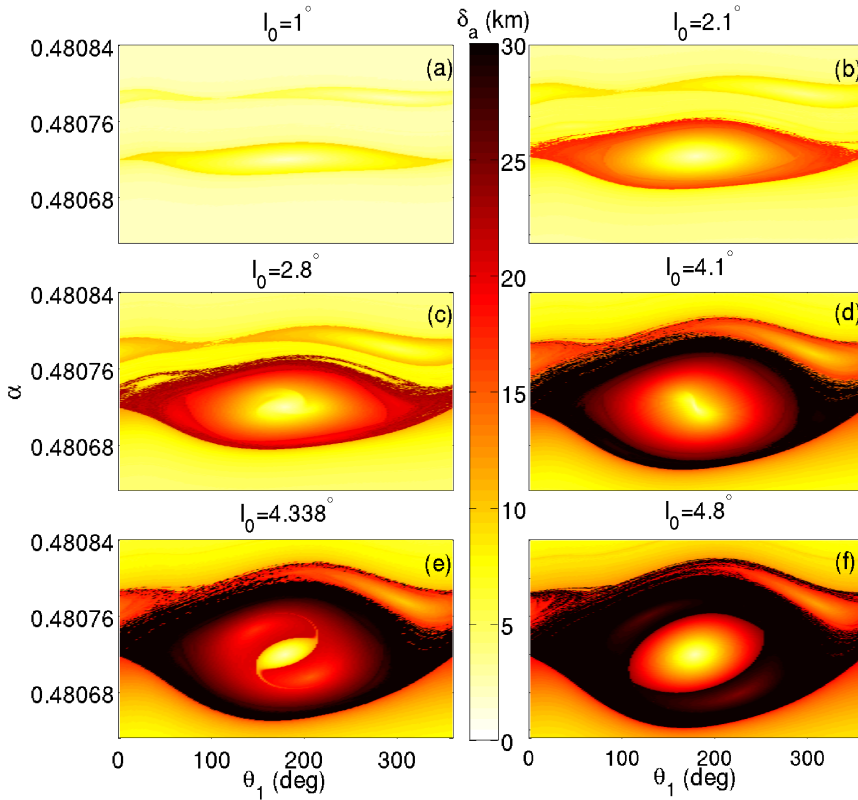


FIGURE 4.7 – Espaces de phase de la résonance 3 : 1 obtenus par le problème non-dissipatif à 3 corps complet composé d'Uranus, Miranda et Umbriel avec effet du  $J_2$ . L'intégrateur, le pas d'intégration, le modèle et les conditions initiales sont identiques qu'à la figure 4.1. Les inclinaisons initiales de Miranda  $I$  sont fixées à  $1^\circ$ ,  $2.1^\circ$ ,  $2.8^\circ$ ,  $4.1^\circ$ ,  $4.338^\circ$  et,  $4.8^\circ$  respectivement dans les figures (a), (b), (c), (d), (e) et (f). La troisième dimension considère les variations du demi-grand axe de Miranda  $a$  (km). Lorsque l'inclinaison augmente, la séparatrice principale s'élargit, diminuant l'espace avec les résonances proches, et impliquant du chaos par chevauchement. Les zones de résonances secondaires semblent évoluer avec l'augmentation en inclinaison.



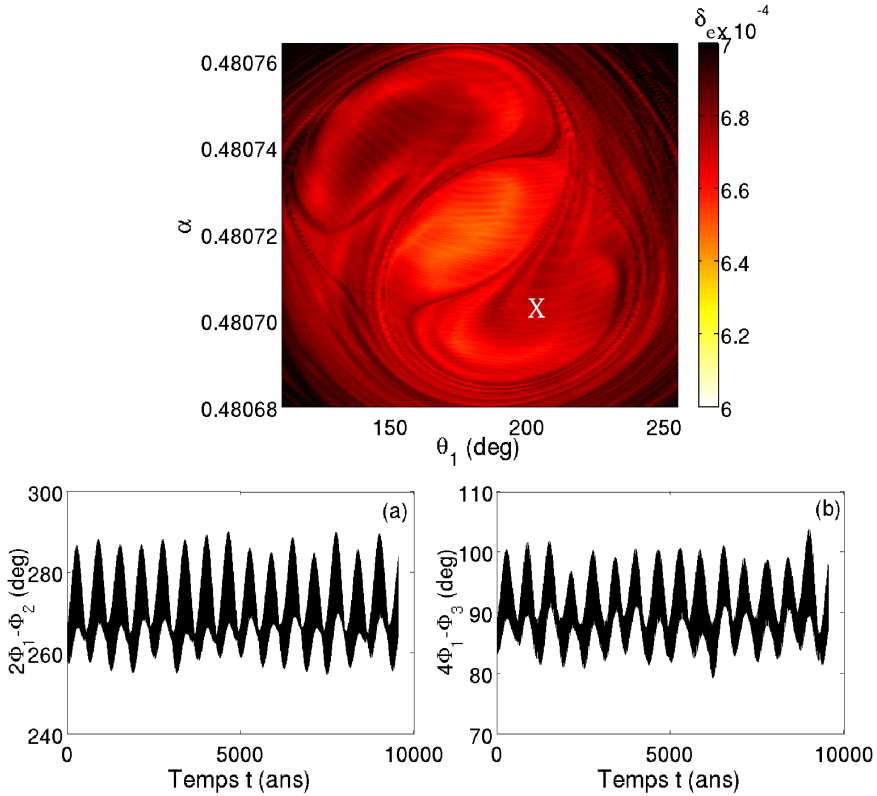


FIGURE 4.8 – Agrandissement du centre de libration de la résonance 3 : 1 dans le problème non-dissipatif à 3 corps composé d’Uranus, Miranda et Umbriel. L’intégrateur, le pas d’intégration, le modèle et les conditions initiales sont identiques à ceux de la figure 4.1, excepté pour le demi-grand axe de Miranda  $a_1 \in [127860 \text{ km} - 127880 \text{ km}]$ . L’inclinaison initiale de Miranda est  $4.338^\circ$ . Le symbole X dans la carte représente la condition initiale de la trajectoire analysée par analyse en fréquences (a) et (b). Deux combinaisons différentes semblent librer avec la fréquence de libration de la résonance primaire : la première avec la fréquence de circulation de  $\theta_2$  (a) et la seconde avec la fréquence de circulation de  $\theta_3$  (b).

### 4.3.3 Zones de résonances secondaires

Une résonance secondaire est définie à l'intérieur d'une résonance primaire, lorsque la fréquence de libration associée  $\nu_1$  entre en commensurabilité avec la fréquence de circulation  $\nu_2$  d'une résonance proche :

$$\nu_1 = k \nu_2 ,$$

où  $k$  est rationnel.

Dermott *et al.* [1988], Tittlemore et Wisdom [1989] et Malhotra et Dermott [1990] ont montré le rôle crucial des résonances secondaires dans la résonance 3 : 1. En effet, une capture dans une résonance secondaire peut expliquer la sortie de la résonance primaire avec une haute inclinaison pour Miranda. Pour ce faire, Tittlemore et Wisdom [1989] utilisent un modèle circulaire incliné et suivent une trajectoire capturée dans la résonance primaire  $I^2$ . À différents points critiques de l'évolution, analysant des surfaces de section, ils montrent que la capture dans une commensurabilité  $1/2^2$  entre la fréquence de libration de  $\theta_1$  et la fréquence de circulation de  $\theta_3$  peut mener à la sortie de la résonance primaire avec une haute inclinaison ( $I = 4.6^\circ$ ).

Malhotra et Dermott [1990] identifient quelques résonances secondaires du problème avec un simple modèle de pendule perturbé et montrent que la capture dans la résonance secondaire de type 3/1 entre la fréquence de libration  $\theta_1$  et la fréquence de circulation de  $\theta_2$  mène à la sortie de la résonance primaire à une inclinaison proche de  $4^\circ$ .

L'espace de phase de la figure 4.8 montre clairement deux zones entourant le centre de libration de la résonance primaire  $\theta_1$ , supposées être des zones de résonances secondaires. Pour identifier ces zones, utilisons l'algorithme NAFF décrit à la section 4.1.3. Cette méthode a l'avantage d'identifier définitivement les fréquences du problème complet et permet de tracer les combinaisons d'angles en libration (cf. Figures 4.8 (a) et (b)). Les fréquences présentes dans le problème complet sont plus nombreuses que dans la version moyennée puisque toutes les courtes périodes sont conservées.

Soit une condition initiale sélectionnée dans une de ces zones (symbole 'X' dans la figure 4.8). La trajectoire non-dissipative résultante est ensuite analysée par l'algorithme afin d'étudier les fréquences et leurs combinaisons : la fréquence principale de libration de la résonance primaire est extraite de la trajectoire choisie dans la figure 4.8, et combinée à d'autres fréquences du problème pour reconstruire des combinaisons distinctes. De manière plus rigoureuse, l'argu-

---

2. Pour éviter toute ambiguïté dans le texte, il a été choisi de noter les résonances primaires  $i : j$  et les résonances secondaires  $i/j$ .

ment en libration  $\theta_1$  est écrit comme :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_0 + A_1 \cos \Phi_1 \\ &+ \text{autres termes de plus petite amplitude ,}\end{aligned}$$

où  $\theta_0 = \pi$  est la valeur de  $\theta_1$  à l'équilibre de libration,  $A_1$  est la plus grande amplitude dans le développement quasi-périodique, et

$$\Phi_1 = \omega_1 t + \Phi_{10} ,$$

où  $\Phi_{10}$  est la phase initiale. La principale fréquence d'oscillation est  $\omega_1$ . Les deux autres angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , considérés comme circulatoires, sont simplement approchés par le plus grand terme (en amplitude) dans leur développement quasi-périodique :

$$\begin{aligned}\theta_j &= A_j \cos \Phi_j \\ &+ \text{autres termes de plus petite amplitude ,}\end{aligned}$$

où  $A_j$  sont les amplitudes,

$$\Phi_j = \omega_j t + \Phi_{j0} ,$$

où  $\Phi_{j0}$  sont les phases initiales et  $\omega_j$  les fréquences des termes sélectionnés pour  $j = 2, 3$ . Une résonance secondaire est une combinaison linéaire proche de 0 de  $\omega_1$  avec  $\omega_2$ , ou avec  $\omega_3$ .

Les figures 4.8 (a) et (b) montrent le résultat de deux combinaisons particulières de  $\Phi_1$ , d'abord avec  $\Phi_2$  (a) et deuxièmement avec  $\Phi_3$  (b). Nous notons que les deux combinaisons sont en libration en même temps, indiquant une résonance secondaire entre l'argument de libration de  $\theta_1$  et les arguments de circulation des résonances primaires  $\theta_2$  et  $\theta_3$  respectivement. La première est de type 2/1 entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et a déjà été identifiée par Malhotra et Dermott [1990]. La deuxième est une résonance secondaire de type 4/1, entre  $\omega_1$  et  $\omega_3$  reportée par Tittlemore et Wisdom [1989].

### Approche analytique pour distinguer les résonances secondaires

Le fait que les combinaisons d'angles définissant les deux résonances secondaires identifiées aux figures 4.8 (a) et (b) semblent être en libration en même temps amène un questionnement et une recherche d'explication par rapport à ce phénomène : la question est de savoir si ces deux résonances secondaires sont identiques ou non. Pour cette approche analytique, nous nous référons aux articles de Henrard et Sato [1990] et Moons et Henrard [1994] dans lesquels les auteurs étudient la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel dans les approximations excentrique et inclinée respectivement et développent des outils analytiques pour prédire la localisation des résonances secondaires dans le cas du problème des 3 corps **restreint**. Ceci revient à reprendre le modèle

développé dans le chapitre 3 et à l'appliquer aux satellites Miranda et Umbriel, ce dernier jouant le rôle du perturbateur sur Miranda, particule sans masse. Le choix du 3 corps restreint dans ce cas-ci peut être critiqué, l'influence de Miranda sur Umbriel étant négligée, mais la modélisation simple qui en découle permettra de différencier les deux résonances secondaires.

Soit l'Hamiltonien (3.27) écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{H} = A \tilde{m} + B (\tilde{m} - Q)^2 + \epsilon_3 2 Q \cos(2\tau) , \quad (4.25)$$

avec, dans le cas du problème des 3 corps composé d'Uranus, Miranda et Umbriel avec effet du  $J_2$ ,  $A = 5.87890 \cdot 10^{-4}$ ,  $B = -1.62274$  et  $\epsilon_3 = -1.730 \cdot 10^{-6}$ . L'angle  $\tau = -2\theta_1$  est l'angle de la résonance  $I^2$ . La recherche de l'équilibre de cet Hamiltonien aboutit à la relation :

$$\tilde{m} - Q = -\frac{\epsilon_3}{B} . \quad (4.26)$$

Les fréquences de circulation des différents angles de la résonance liés aux inclinaisons ( $I^2$ ,  $II'$  et  $I'^2$ ) sont données via les équations d'Hamilton-Jacobi (3.1). Avec les notations développées au chapitre 3 :

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = -2B (\tilde{m} - Q) \\ \dot{\rho} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{m}} = 2B (\tilde{m} - Q) + A \\ \dot{\tau} + \dot{\rho} &= A \\ \dot{\tau} - \dot{\rho} &= -4B (\tilde{m} - Q) - A . \end{aligned}$$

Par la relation (4.26), ces fréquences sont données à l'équilibre par :

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= 2\epsilon_3 \\ \dot{\rho} &= A - 2\epsilon_3 \\ \dot{\tau} + \dot{\rho} &= A \\ \dot{\tau} - \dot{\rho} &= 4\epsilon_3 - A . \end{aligned}$$

Une résonance secondaire est obtenue lorsque la fréquence d'un de ses angles combinée à la fréquence de libration de la résonance primaire est elle-même en libration. Il est cependant impossible de comparer des fréquences de circulation avec des fréquences de libration, la période de l'angle associé évoluant de 0 à  $2\pi$  dans le premier cas mais pas dans le second. Comme dans le chapitre 3, l'Hamiltonien (4.25) est réécrit en coordonnées cartésiennes et développé au second ordre autour de l'équilibre stable  $(x_e, y_e)$ , afin d'obtenir une approximation d'un oscillateur linéaire. Un ensemble de variables locales angle-action  $(J, \Psi)$  est introduit et donne la fréquence  $\dot{\Psi}$  sous la forme :

$$\dot{\Psi} = 4\epsilon_3 \left( 1 + \frac{B}{\epsilon_3} \tilde{m} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

cette fréquence étant la fréquence en circulation évoluant de 0 à  $2\pi$  et correspondante à la fréquence de libration de la résonance primaire, calculée à l'équilibre.

La combinaison de fréquences illustrée à la figure 4.8 (a) correspond à une résonance secondaire de type 2/1 entre la fréquence de l'angle en libration de la résonance primaire  $\theta_1$  et la fréquence de l'angle en circulation  $\theta_2$ . Dans le développement analytique, cela revient à vérifier :

$$|2\dot{\Psi}| = |\dot{\tau} - \dot{\rho}| ,$$

dont la résolution mène à la relation :

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \frac{(4\epsilon_3 - A)^2}{64B\epsilon_3} - \frac{\epsilon_3}{B} \\ &= 1.968 \cdot 10^{-3} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

La combinaison de fréquences illustrée à la figure 4.8 (b) correspond à une résonance secondaire de type 4/1 entre la fréquence de l'angle en libration de la résonance primaire  $\theta_1$  et la fréquence de l'angle en circulation  $\theta_3$ . Dans le développement analytique, cela revient à vérifier :

$$|4\dot{\Psi}| = |\dot{\rho}| , \quad (4.28)$$

dont la résolution mène à la relation :

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \frac{(A - 2\epsilon_3)^2}{256B\epsilon_3} - \frac{\epsilon_3}{B} \\ &= 4.856 \cdot 10^{-4} , \end{aligned} \quad (4.29)$$

la valeur de  $Q$  étant obtenue dans chaque cas par l'expression (4.26). Les expressions (3.46) permettent de localiser les résonances secondaires à l'équilibre dans un plan  $(a, I)$ .

Bien que proches, on constate mathématiquement que les relations (4.27) et (4.29) sont différentes et localisent par l'expression (3.46) les deux résonances secondaires à des endroits différents dans le plan  $(a, I)$ , ce qui les distingue. Physiquement, la différence est cependant indétectable ( $\approx 10^{-11}$  km), ce qui rend sa représentation dans le plan non significative. Toutefois, par les expressions numériques obtenues en (4.27) et (4.29), on conclut que les figures 4.8 (a) et (b) montrent deux résonances secondaires différentes en libration en même temps.

### Scénario explicatif de la sortie de la résonance $I^2$

Dans le problème de la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel, il est évident que différents scénarios peuvent se produire mais le plus intéressant est certainement celui qui implique une sortie de résonance à une inclinaison proche de la valeur actuelle i.e.  $4.5^\circ$  pour Miranda. La figure 4.9 montre cette trajectoire particulière associée à nos résultats d'analyse en fréquences.

Le graphique (a) montre l'évolution de l'inclinaison  $I$  de Miranda en fonction du temps  $t$  pendant la capture dans la résonance en  $I^2$ , illustrée par la libration de l'angle  $\theta_1$  (b). La valeur de l'inclinaison de Miranda est de  $4.395^\circ$  à la sortie de la résonance. Les deux graphiques (c) et (d) montrent les résultats d'analyse en fréquences. Durant la capture, deux combinaisons sont successivement en libration. Comme dans Malhotra et Dermott [1990], l'amplitude de libration de l'angle  $\theta_1$  diminue jusqu'à la capture dans une résonance secondaire 3/1 entre la fréquence de libration  $\omega_1$  associée à  $\Phi_1$  et la fréquence de circulation  $\omega_2$  associée à  $\Phi_2$  ((b) et (d)). À l'instant  $t \approx 420 \cdot 10^3$  ans, cette résonance secondaire est interrompue et la trajectoire entre dans une zone chaotique où la trajectoire oscille entre les deux zones de résonances secondaires.

L'émergence de cette zone chaotique s'explique par l'élargissement de la séparatrice de la résonance primaire qui intervient lors de l'augmentation d'inclinaison de Miranda. Ce phénomène est illustré par les surfaces de section de Titemore et Wisdom [1989] montrant cet élargissement et l'enchevêtrement d'îlots de résonances associé. Nous repérons ce phénomène également dans la figure 4.7 montrant cet élargissement et les zones de résonances secondaires dans la séparatrice dans le dernier graphique (f).

Reprenant le scénario de la trajectoire dans le système dissipatif, on observe finalement une capture dans une résonance secondaire 2/1 jusqu'à la sortie de la résonance primaire (cf. Figures 4.9 (b) et (d)).

Si nous nous référons à la figure 7 dans Malhotra et Dermott [1990], ce scénario différent reste cohérent avec l'explication obtenue par le modèle moyen présenté par les auteurs. Nous invitons le lecteur à se référer à la figure 7 p.461 de Malhotra et Dermott [1990] pour l'explication suivante : à une inclinaison proche de  $2.8^\circ$ , l'amplitude de libration de  $\theta_1$  est petite. La trajectoire suit la courbe 3/1 jusqu'à ce que l'inclinaison de Miranda proche de  $3.4^\circ$  soit atteinte, i.e. jusqu'à l'entrée dans la zone chaotique (aire hachurée dans la figure) où nous avons une interruption de la résonance secondaire 3/1. À ce point, notre scénario diffère de Malhotra et Dermott [1990]. Ensuite, notre trajectoire oscille entre deux résonances secondaires et est finalement capturée dans une commensurabilité 2/1 entre la fréquence de libration  $\omega_1$  associée à  $\Phi_1$  et la fréquence de circulation  $\omega_2$  associée à  $\Phi_2$  jusqu'à la sortie de la résonance primaire  $\theta_1$  à une haute inclinaison pour Miranda.

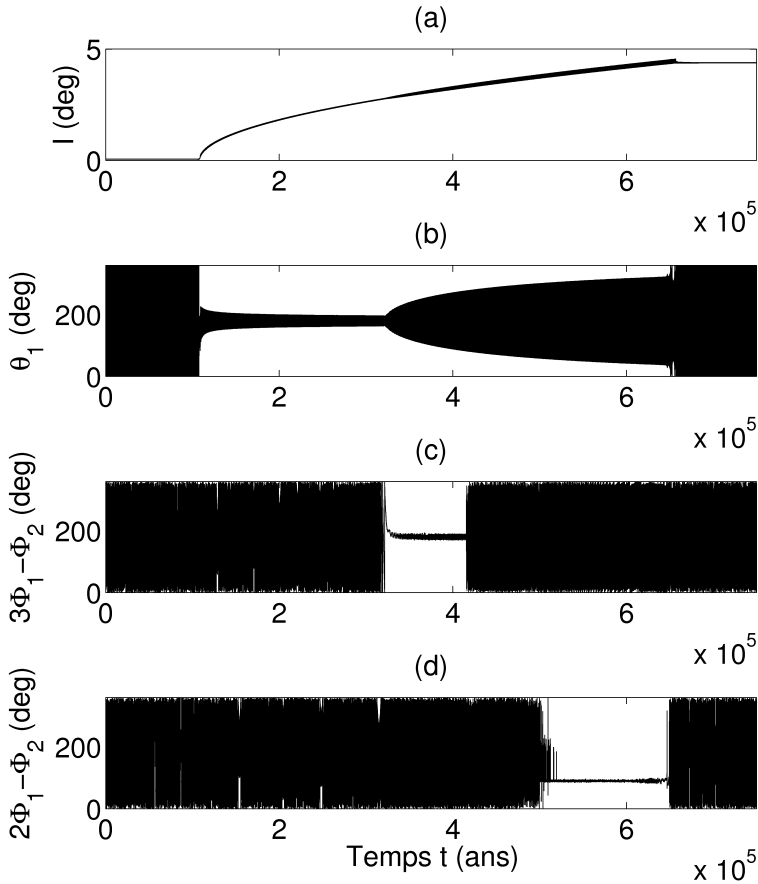


FIGURE 4.9 – Un exemple d'évolution de l'inclinaison de Miranda  $I$  avec le problème complet. Le graphique (a) montre l'évolution de l'inclinaison de Miranda  $I$  en fonction du temps  $t$  pendant la capture dans la résonance  $I^2$ . Le graphique (b) est l'évolution de l'angle  $\theta_1$  en fonction du temps  $t$ . Les graphiques (c) et (d) montrent les résultats d'analyse en fréquences pour deux combinaisons d'arguments pendant la capture dans la résonance en  $I^2$ . Dans le graphique (b), on observe la diminution de l'amplitude de libration de  $\theta_1$  jusqu'à la capture dans une résonance secondaire 3/1 entre l'angle de libration  $\theta_1$  et l'angle de circulation  $\theta_2$  (c). Au temps  $t = 420 \cdot 10^3$  années, il y a la sortie de cette résonance secondaire. Finalement, la trajectoire est capturée dans une résonance secondaire 2/1 entre l'angle de libration  $\theta_1$  et l'angle de circulation  $\theta_2$  jusqu'à la sortie de la résonance primaire (d) à une inclinaison de  $4.395^\circ$  pour Miranda.

Ce résultat montre une fois encore l'importance de la séparatrice de la zone chaotique associée : l'avenir de la trajectoire capturée dans une résonance en moyen mouvement 3 : 1 entre Miranda et Umbriel n'est pas complètement déterminé puisqu'il dépend d'un passage au travers d'une région chaotique pendant son évolution. La valeur finale de l'inclinaison de Miranda dépend de la capture dans un ensemble de résonances secondaires ou un autre.

## 4.4 Conclusions et perspectives

Ce chapitre détaille l'étude sur la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel, menant à une explication plausible de la valeur actuelle de l'inclinaison de Miranda. Le problème complet à 3 corps est surtout utilisé mais une version moyenne permettant de faire le lien avec les études antérieures est également présentée. En effet, le problème a été étudié par de nombreux auteurs il y a une vingtaine d'années et la remise à jour de certains résultats, notamment par l'utilisation de nouveaux outils numériques, fournit une nouvelle approche au problème. Les principaux résultats présentés dans Tittlemore et Wisdom [1989] et Malhotra et Dermott [1990] ont été retrouvés et améliorés par notre approche menant à une meilleure connaissance dynamique du système en général.

À ma connaissance, le détecteur de chaos MEGNO n'a jamais été appliqué au système uranien. La combinaison de ce détecteur et de l'échelle basée sur les variations des éléments orbitaux amène une nouvelle visualisation de l'espace de phase du problème. L'utilisation de l'analyse en fréquences sur des trajectoires particulières permet l'identification de zones de résonances secondaires imbriquées dans la séparatrice chaotique lorsque l'inclinaison de Miranda est élevée ( $> 4^\circ$ ). Dans ce cas, les zones de résonances secondaires interviennent du fait de la proximité entre les résonances due au faible aplatissement de la planète. Il en résulte une libration de deux combinaisons d'angles en même temps, entre l'angle de libration de  $\theta_1$  et l'angle de circulation de  $\theta_2$  ainsi qu'entre l'angle de libration de  $\theta_1$  et l'angle de circulation de  $\theta_3$ .

Cette particularité a été étudiée de manière plus approfondie via une approche analytique reprenant le modèle restreint développé au chapitre 3 appliqué aux satellites Miranda et Umbriel. L'objectif est de déterminer si les résonances secondaires définies par les deux combinaisons d'angles précitées sont distinctes ou non. L'approche par les variables angle-action permet de déterminer une fréquence de libration à l'équilibre de l'angle de la résonance primaire  $\theta_1$ . Celle-ci, combinée aux fréquences des angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , mène à la détermination de deux paramètres  $\tilde{m}$  distincts, localisant ainsi les résonances secondaires à l'équilibre dans le plan  $(a, I)$  à deux endroits différents, ce qui les distingue.



Un scénario d'évolution a également été proposé et nous avons montré en particulier qu'une trajectoire capturée dans une résonance  $I^2$  peut être interrompue à une inclinaison de  $4.395^\circ$  par une résonance secondaire 2/1 entre la fréquence de libration  $\omega_1$  associée à  $\Phi_1$  et la fréquence de circulation  $\omega_2$  associée à  $\Phi_2$ . L'analyse en fréquences permet la détection et la détermination définitive du type de résonance secondaire à l'intérieur de la résonance primaire. L'étape chaotique de l'évolution lorsque les îlots de résonances secondaires sont localisés à l'intérieur de la séparatrice est présente dès que l'inclinaison de Miranda est élevée. L'avenir de la trajectoire et la valeur finale de l'inclinaison de Miranda à la sortie de la résonance sont donc incertains car ils dépendent de la succession des résonances secondaires rencontrées qui varie selon les trajectoires (i.e. selon les conditions initiales).

Une perspective à cette analyse dynamique est le couplage de l'évolution des orbites à celle de l'intérieur des satellites. Les deux évolutions sont liées par l'effet de marée qui pousse les satellites dans les zones de résonances, impliquant, comme on l'a vu, l'augmentation de certains éléments orbitaux. Cette augmentation amplifie la dissipation intérieure des satellites menant à une évolution de leurs composants internes. Cette combinaison de deux approches dynamiques est intéressante pour de nombreuses raisons : la principale est peut-être la compréhension couplée des points dynamiques et approches thermiques au travers d'un processus de résonance orbitale. Cette approche est développée au chapitre suivant.

## CHAPITRE 5

---

### Approche couplée

---

Les survols des planètes géantes et de leurs lunes par la sonde spatiale *Voyager 2* à partir de 1979 amenèrent de nombreuses données et images sur le système solaire extérieur. Dans le cas du système uranien [Smith *et al.*, 1986], seul l'hémisphère sud des satellites principaux était illuminé lors du passage de la sonde et les images obtenues pour les satellites principaux d'Uranus montrent des surfaces présentant des signes d'activité endogénique ainsi que des cratères d'impact liés aux premières étapes d'évolution [Brown *et al.*, 1991].

La sonde *Voyager* s'approcha au plus proche du satellite principal le plus intérieur, i.e. Miranda, déterminant ainsi des structures tectoniques à la surface avec une résolution bien plus élevée que pour les deux satellites plus éloignés, Titania et Obéron. Les images obtenues pour les satellites Miranda et Ariel montrent des signes de *resurfacing*<sup>1</sup> endogénique associés à des phénomènes tectoniques et impliquant probablement des processus cryo-volcaniques (Plescia [1987] ; Plescia [1988]).

Le cas de Miranda pose question : de taille assez petite [Thomas, 1988] comparée à celles d'autres satellites présentant une histoire géologique complexe et potentiellement intéressante, le satellite montre néanmoins une surface suggérant un intense passé géologique. Les deux types de terrain dont il est constitué témoignent d'une histoire thermique subdivisée en au moins deux périodes distinctes [Brown *et al.*, 1991]. La première période est caractérisée par un terrain

---

1. Le terme anglais *resurfacing* est utilisé dans le cas d'une activité géologique (telle que l'érosion, un large impact, ...) changeant la structure de surface du satellite. N'ayant pas de pendant francophone adéquat, il sera laissé en anglais dans le texte.

fortement cratérisé dû aux impacts sur la surface du satellite. Ce dernier est également sujet à de fortes contraintes internes induisant l'apparition de failles dans la surface. La seconde période est, elle, caractérisée principalement par 3 régions appelées « *coronae* » ou couronnes [Strobell et Masursky, 1987] qui sont probablement le signe d'un phénomène de diapirs<sup>2</sup> [Pappalardo *et al.*, 1997]. Ces *coronae* sont déformées par des creux et des crêtes sub-parallèles pouvant être le résultat d'un processus de différenciation interne [Janes et Melosh, 1988].

Une explication probable des structures en forme de couronnes peut être donnée par un chauffage par marée induit par les interactions gravitationnelles entre les satellites : ceux-ci sont sujets à des résonances qui forcent les orbites à être parfois hautement excentriques [Peale *et al.*, 1979]. C'est ce chauffage par marée qui fait le lien entre les parties orbitale et thermique de l'évolution.

Dans le cas de Miranda, différentes études se sont penchées sur un possible chauffage par marée. Considérant une valeur d'excentricité forcée jusqu'à 0.1, Dermott *et al.* [1988] en ont déduit une augmentation de température de 20 K. L'effet du chauffage par marée a également été estimé dans Tittlemore et Wisdom [1990] : ils évaluèrent son effet lors du passage dans la résonance en moyen mouvement entre Miranda et Umbriel en utilisant l'expression de dissipation de Peale et Cassen [1978] et observèrent, dans leurs simulations, de larges augmentations d'excentricité pour Miranda durant les phases chaotiques de l'évolution. Cependant, la haute excentricité de Miranda n'est pas maintenue suffisamment longtemps pour chauffer Miranda si le chauffage par marée est le seul mécanisme considéré. Peale [1988] montre également que les satellites Miranda et Ariel sont de trop petites tailles pour être chauffés uniquement avec l'effet de marée et en conclut qu'il faut probablement introduire un autre phénomène permettant d'augmenter les excentricités (événement catastrophique?). Une perspective proposée était néanmoins l'implémentation numérique du système tenant compte de modèles rhéologiques et de paramètres thermiques ayant une signification physique. C'est ce qui est proposé ici.

Ce chapitre présente la modélisation de la possible augmentation en excentricité impliquée par les résonances orbitales et le chauffage endogénique résultant via une approche couplée de l'évolution. Il est le résultat de ma collaboration avec Özgür Karatekin de l'Observatoire Royal de Belgique, spécialiste en évolution interne des satellites naturels.

L'évolution thermique considère un chauffage par la désintégration des éléments radiogéniques ainsi qu'un chauffage par les marées amené par les variations des éléments orbitaux, résultantes de la traversée/capture d'une paire de satellites dans une zone de résonance. L'évolution orbitale modélise ce passage dans la résonance par un problème des 3 corps moyenné. Le couplage des deux

---

2. Un diapir résulte d'un mouvement ascensionnel de matériaux légers au travers de roches plus denses.

parties dépend du rapport de marée  $(k_2/Q)_s$ , calculé dans le module thermique et utilisé dans le module dynamique. Le chauffage est introduit sur chaque satellite impliqué. Par différents modèles rhéologiques (Maxwell (e.g. Peltier [1974]), Burgers (e.g. Karato [1998]) et Andrade [Andrade, 1910]), la rigidité et la viscosité sont calculées. Je souhaite attirer l'attention sur le fait qu'un couplage des deux approches est présenté ici : il ne s'agit aucunement d'une évolution dynamique séparée utilisant les sorties d'une évolution thermique indépendante mais bien d'une connexion entre les deux codes avec échanges continus d'informations ayant des conséquences sur les deux évolutions.

La première section de ce chapitre présente l'évolution thermique et contient le processus de résolution de l'équation de la chaleur avec des termes de source pour une sphère isotrope. Ces termes de source sont détaillés et les paramètres thermiques sont définis selon un mélange homogène de silicates et de glaces. Des modèles rhéologiques différents et le calcul associé de la fonction de dissipation  $Q$  sont introduits. La seconde section présente le module dynamique qui introduit la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel. Le formalisme Hamiltonien sera à nouveau utilisé pour présenter le problème et sa moyennisation. Les résultats seront ensuite comparés à ceux obtenus dans le cadre du problème des 3 corps complet présenté au chapitre 4. Le couplage des deux premières sections est représenté schématiquement dans la troisième section et appliqué à la paire de satellites Miranda-Umbriel dans la section suivante. Celle-ci est divisée en deux cas : un scénario *nominal* montrant l'évolution de Miranda avec des paramètres thermiques et variables orbitales réalistes, et un scénario *extrême* considérant une excentricité élevée pour Miranda. Ces deux exemples montreront la difficulté de chauffer un satellite tel que Miranda lorsqu'on considère un état initial relativement froid avec des températures internes uniformes et des températures de surface en équilibre radiatif thermique.

## 5.1 Module thermique

Les satellites du système solaire extérieur présentent différentes compositions. Bien que certains satellites soient exclusivement rocheux (e.g. Io), la majorité des lunes des planètes géantes sont composées principalement d'un mélange de roches (silicates et composants de fer) et de glaces. Ce mélange est parfois homogène ou forme des couches séparées créant un satellite dit *différencié* en un noyau de roche et un manteau de glace. Des contraintes supplémentaires sur les compositions peuvent également être données à l'aide de spectrophotométrie infrarouge : on montre alors que le composant principal de la surface de Miranda est de la glace [Brown et Clark, 1984].

Les structures internes des satellites naturels sont déterminées lorsque leur distribution de masse et leur densité sont connues. Celles-ci dépendent des harmoniques du champ gravitationnel (coefficients  $J_2$ ,  $C_{22}$ , etc.). Dans le cas des

satellites d'Uranus, ces paramètres étant non-déterminés, les structures internes doivent être déduites des éléments observés en surface et être en adéquation avec les densités moyennes de chacun d'eux. La densité de Miranda évaluée à  $1200 \text{ kg/m}^3$  suggère que son intérieur est composé de roches et de glaces. On ne peut cependant pas conclure sa différenciation de par le manque d'informations sur le champ de gravité extérieur du satellite.

Suivant une étape d'accrétion du mélange roches-glaces, Miranda pourrait avoir démarré une différenciation si le chauffage par marée était suffisant. La surface exotique et diversifiée ainsi que la présence de coronae suggèrent une remontée à la surface de matériel chaud. L'âge relativement jeune et la géologie des coronae sont cohérents avec une activité géologique temporaire après la formation du satellite. Il est probable que cette activité interne n'ait pas été active suffisamment longtemps pour altérer l'ensemble de la surface et différencier l'intérieur [Greenberg *et al.*, 1991]. Le timing est inconnu mais une telle activité interne pourrait être causée par le chauffage par marée dans le cas où Miranda serait capturée dans une zone de résonance menant à des excentricités forcées.

Nous commençons les calculs considérant Miranda comme un mélange homogène de roches et de glaces. Or, les changements de phase de la glace sont particulièrement compliqués et l'implication de composants tels que l'ammoniac ou le méthane, qui diminuent la température du point de fusion, complexifie grandement l'évolution des structures internes des satellites [Husmann *et al.*, 2009]. La suspicion de présence et de maintien d'eau liquide dans certains d'entre eux (voir e.g. Husmann *et al.* [2006]) ne peut s'expliquer que par une source de chaleur interne au satellite. Les principales sources comprennent le chauffage par la désintégration des éléments radiogéniques dans les roches silicatées ainsi que le chauffage par marée dû aux effets gravitationnels.

Le module thermique présenté ici prend en compte ces deux sources connues et considère un transfert de chaleur par conduction. Le modèle de refroidissement de la sphère homogène et à symétrie sphérique est donc introduit. Ensuite nous ajoutons les deux termes de source impliquant les augmentations de température à l'intérieur du satellite. Le module thermique est d'abord présenté dans un cas générique. La dernière section reprend ensuite l'application aux satellites Miranda et Umbriel.

### 5.1.1 Refroidissement

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles (EDP) permettant de décrire la distribution de température dans une région donnée en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications à cette équation : elle permet notamment de modéliser le refroidissement d'une Terre isotherme lorsqu'on considère un état initial chaud [Schubert *et al.*, 2001]. Sans considé-

ration de génération de chauffage interne, l'équation de la chaleur est appelée *équation de diffusion* et est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T, \quad (5.1)$$

où  $\nabla^2$  est le laplacien et  $T = T(r, t)$  est la température définie comme une fonction de la distance au centre  $r$  du satellite et du temps  $t$ ,  $\rho$  est la densité. Les paramètres thermiques  $C_p$  et  $k$  sont respectivement la chaleur spécifique à pression constante et la conductivité thermique. Appliqué à Miranda, les valeurs numériques des paramètres thermiques sont résumées dans la table 5.1. La diffusivité thermique est définie par :

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}, \quad (5.2)$$

et caractérise la faculté d'un matériau à perdre de la chaleur par conduction.

Dans le cadre de l'application à un satellite de forme sphérique, les coordonnées de l'équation cartésienne (5.1) sont adaptées au problème par l'introduction des coordonnées sphériques  $(r, \phi, \theta)$ , où  $\phi$  est la longitude et  $\theta$ , la colatitude. On suppose également une symétrie sphérique (dépendance uniquement radiale) permettant de réécrire le laplacien comme :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

et d'obtenir l'équation (5.1) sous la forme :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]. \quad (5.3)$$

Cette équation est une EDP à une dimension spatiale. Elle peut être résolue analytiquement sous certaines conditions frontières particulières et numériquement par différences finies.

### Définition des conditions frontières

Les conditions frontières sont définies pour le centre du satellite ( $r = 0$ ) ainsi qu'à la surface ( $r = R$ ) de celui-ci. La singularité en  $r = 0$  est écartée en posant :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (5.4)$$

traduisant une symétrie radiale. Utilisant un développement de Mac Laurin, on peut développer la température autour du point  $r_0 = 0$  au premier ordre comme :

$$T(r, t) = T(r_0, t) + \frac{\partial T(r_0, t)}{\partial r} (r - r_0). \quad (5.5)$$

Dérivant cette dernière équation par rapport à  $r$  et par la condition (5.4), on obtient une forme simplifiée de l'équation de la chaleur qui reste valide à l'origine [Gutierrez-Miravete, 2004] :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 3 \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} . \quad (5.6)$$

Comme condition frontière à la surface ( $r = R$ ), on choisit une température constante sur toute la surface :

$$T(R, t) = T_{eq} \quad \forall t, \quad (5.7)$$

où  $T_{eq}$  est la température d'équilibre à la surface déterminée par l'équilibre de transfert de chaleur qui s'établit entre le flux de chaleur sortant (rayonné) et le flux de chaleur entrant :

$$T_{eq} = \left( \frac{(1 - A) Q_{\odot}}{\epsilon_M \sigma} \right)^{1/4} ,$$

où  $\epsilon_M$  est l'émissivité de surface moyenne et  $A$  est l'albédo moyen dans l'infrarouge,  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann et  $Q_{\odot}$  est la constante de radiation solaire i.e. le flux de radiation en provenance du Soleil sur la distance Soleil-Uranus en unités astronomiques. À noter qu'il est également possible de fixer une condition frontière considérant une surface radiative :

$$\alpha \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \epsilon \sigma T(R, t)^4 - (1 - A) Q_{\odot} ,$$

où le premier terme est le flux de chaleur rayonné et le deuxième terme celui qui est reçu. Dans ce travail, seule la condition frontière (5.7) sera utilisée.

### Définition des conditions initiales

Comme condition initiale ( $t = 0$ ), on définit un profil de température en fonction de la distance au centre  $r$  :

$$T(r, 0) = f(r) \quad \forall r \in [0, R] . \quad (5.8)$$

où, dans un premier temps, le profil est celui d'un satellite homogène à une température constante :

$$f(r) = C \quad \forall r \in [0, R] . \quad (5.9)$$

Dans un second temps (cf. Section 5.3.2), la fonction constante  $f(r)$  sera remplacée par un profil de température défini par la désintégration des éléments radiogéniques (cf. Sous-section 5.1.2).

### Résolution numérique : méthode des différences finies

Nous présentons, dans cette sous-section, la méthode numérique utilisée dans le code thermique pour résoudre l'équation de diffusion (5.3). Cette résolution a été validée par une approche analytique dans un cas de conditions frontières précises exposé par après. L'ensemble du processus (approches numérique et analytique) est présenté notamment dans le manuel en accès libre de Gutierrez-Miravete [2004].

La solution de l'équation de diffusion (5.3) est approchée numériquement à l'aide de la méthode des différences finies. En définissant une grille de points de discrétisation, cette méthode d'analyse numérique permet de déterminer la valeur d'une fonction inconnue par la connaissance de sa valeur en des points qui lui sont proches. La solution approchée est d'autant meilleure que le maillage prédéfini est fin.

La température donnée par l'équation de diffusion (5.3) dépend de deux variables : la distance au centre de la sphère conductrice  $r$  et le temps  $t$  qui sont discrétisés en  $N_i$  et  $N_j$  points respectivement. La stabilité du code pour le choix de  $N_i$  et  $N_j$  effectué a été vérifiée. On écrit dès lors la température, pour une distance au centre  $r_i$  et un temps  $t_j$  donnés, sous la forme :

$$T_{i,j} \equiv T(r_i, t_j) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_i, \quad \text{et } j = 1, \dots, N_j .$$

Utilisant la définition de la dérivée, on écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(r, t + \Delta t) - T(r, t)}{\Delta t} .$$

Au point  $(r_i, t_j)$ , la limite précédente est approchée par :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta t} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) , \quad (5.10)$$

où  $\Delta t = t_f/N_j$  est petit,  $t_f$  étant le temps final considéré. L'équation (5.10) constitue la discrétisation du terme de gauche de l'équation de diffusion (5.3) en considérant une différence finie « vers l'avant », ce qui est cohérent par rapport à la variation en temps de la température que l'on souhaite déterminer au pas de temps suivant par rapport à l'actuel. Le terme de droite utilise une combinaison de différences finies centrées autour de  $r_i$  afin de tenir compte de la température autour du point considéré. On écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta r} \left( r_{i+\frac{1}{2}}^2 U_{i+\frac{1}{2},j} - r_{i-\frac{1}{2}}^2 U_{i-\frac{1}{2},j} \right) ,$$

où  $\Delta r = R/(N_i - 1)$  est petit et  $U_{i,j} = (\frac{\partial T}{\partial r})_{i,j}$ . La discrétisation centrée sur  $r_i$  est définie comme :

$$r_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i \pm 1}}{2} .$$



En appliquant une deuxième fois la différence finie centrée sur  $U_{i,j}$ , l'équation de diffusion (5.3) est discrétisée sous la forme :

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{r_i^2} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2 (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2}}^2 (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta r^2}.$$

Concernant les conditions frontières, la méthode des différences finies est appliquée sur l'équation (5.6) pour définir la température au centre du satellite. La température à la surface est fixée à la température d'équilibre selon la condition (5.7).

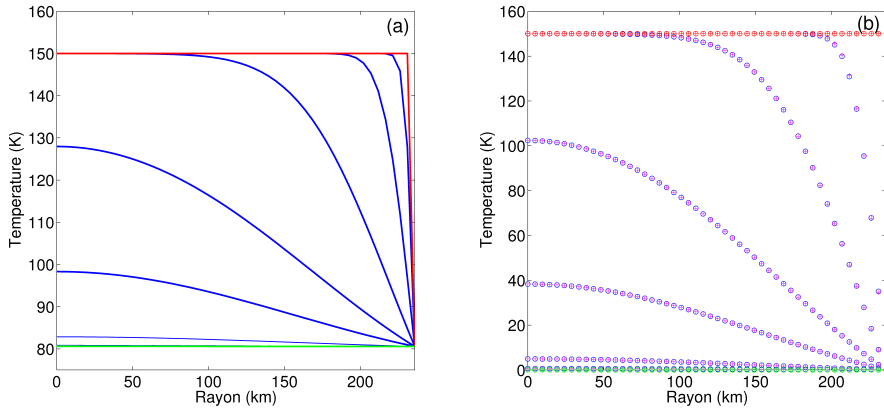


FIGURE 5.1 – Évolution du profil de température sur l'échelle de temps caractéristique de conduction ( $386 \times 10^6$  années). Les profils sont obtenus par la résolution de l'équation de diffusion et montrent à la figure (a) un refroidissement du satellite sur une échelle de temps qui est celle du temps caractéristique de conduction. La figure (b) est la validation analytique avec la condition frontière  $T = 0$  K à la surface du satellite, les points  $\circ$  (bleu) et  $+$  (rose) étant respectivement obtenus par les approches numérique et analytique. Les conditions initiales et finales sont tracées en rouge et en vert respectivement. Les profils en bleu sont des profils intermédiaires.

Une validation de la résolution numérique par différences finies de l'équation de diffusion (5.3) avec les conditions frontières pré-citées est présentée à la figure 5.1 (a) pour laquelle on considère le satellite Miranda initialement à une température fictive de 150 K, excepté sur sa surface où la température est fixée à sa température d'équilibre de 80.5 K (courbe en rouge).

La résolution de l'équation de la chaleur sans source de chaleur extérieure doit mener à un refroidissement du satellite jusqu'à l'obtention d'une température homogène sur tout le satellite et ce, sur un temps proche du « *temps caractéristique de conduction* » :

$$t_c = \frac{R^2}{\alpha} ,$$

représentant le temps nécessaire pour arriver à cette température homogène par transfert de chaleur via conduction thermique. Appliqué au satellite Miranda, ce temps caractéristique est de  $386 \times 10^6$  années. La figure 5.1 (a) montre le refroidissement de Miranda sur son échelle de temps caractéristique en partant de la condition initiale en rouge. Les profils de température intermédiaires sont tracés en bleu. Le résultat final est tracé en vert : sur le temps caractéristique de conduction, on obtient un satellite à température homogène de 80.5 K. Le choix des paramètres thermiques est explicité en détail à la section 5.1.4. Cependant, leurs valeurs numériques sont résumées dans la table 5.1.

TABLE 5.1 – Paramètres physiques du modèle thermique pour Miranda.

	Unité	Glace	Silicate	Corps homogène
Densité $\rho$	kg m <sup>-3</sup>	917	2500	1200
Chaleur spécifique $C_p$	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	888.7	920	900
Conductivité thermique $k$	W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	5.4	4.2	5.2
Rigidité $\mu$	GPa	4.5	65	27

### Résolution analytique

La méthode de résolution numérique est validée via une approximation analytique. En effet, dans certains cas particuliers, l'équation de la chaleur est résolue analytiquement. C'est le cas lorsqu'on impose que la température à la surface de la sphère est égale à zéro. La résolution analytique considère donc un satellite homogène répondant à la condition initiale (5.8) avec  $f(r) = T_{eq}$   $\forall r \in [0, R]$ , la condition frontière (5.4) au centre et la condition de surface définie par :

$$T(R, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (5.11)$$

Supposons que la solution de l'équation de diffusion (5.3) soit séparable et écrite sous la forme :

$$T(r, t) = \Lambda(r) \Gamma(t) , \quad (5.12)$$

et réécrivons l'équation (5.3) par :

$$\frac{1}{\Lambda} \left( \frac{2}{r} \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{d^2\Lambda}{dr^2} \right) = \frac{1}{\alpha\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} . \quad (5.13)$$

Les variables  $r$  et  $t$  étant complètement indépendantes, les membres de droite et de gauche ne sont égaux que dans le cas où il s'agit d'une constante arbitraire  $c$ . On écrit dès lors pour le membre de gauche :

$$\frac{d^2\Lambda}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Lambda}{dr} - c \Lambda = 0 , \quad (5.14)$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non-constants. On peut vérifier que cette équation admet une solution générale non-triviale dans le cas où la constante  $c$  est négative. Posons  $c = -b^2$ , où  $b$  est une constante, et écrivons la solution générale de (5.14) sous la forme :

$$\begin{aligned} \Lambda(r) &= A \frac{\sin br}{r} + B \frac{\cos br}{r} \\ &= A \frac{\sin br}{r} , \end{aligned} \quad (5.15)$$

où la condition frontière au centre (5.4) implique  $B = 0$  et la condition (5.11) implique pour une solution non-triviale ( $A$  est une constante non nulle) :

$$b_n = \frac{\pi n}{R} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Avec la définition  $c = -b^2$ , le membre de droite de l'équation (5.13) a comme solution :

$$\Gamma(t) = \exp(-\alpha b^2 t) . \quad (5.16)$$

Par les équations (5.15) et (5.16), on écrit la solution générale de l'équation (5.12) par superposition de solutions particulières :

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r, t) \quad (5.17)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} \sin(b_n r) \exp(-\alpha b_n^2 t), \quad (5.18)$$

où en  $t = 0$ , on écrit :

$$T(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} \sin(b_n r) ,$$

représentant une série de Fourier dont le coefficient dans le cas de la condition initiale (5.8) avec  $f(r) = T_{eq}$  K est donné par :

$$A_n = \frac{2 T_{eq} R}{n\pi} (-1)^{n+1} .$$

Le résultat de l'approximation analytique est présenté à la figure 5.1 (b) où la condition initiale est définie selon (5.8) avec  $f(r) = 150$  K (en rouge) et les

conditions frontières (5.4) et (5.11) sont de mises. Le temps caractéristique de la simulation est celui défini par (5.1.1) appliqué au satellite Miranda. On observe que la solution analytique (5.18) (+ en bleu) approche correctement la solution obtenue via la méthode par différences finies (o en bleu). Le résultat final donne un refroidissement du satellite jusqu'à l'obtention d'une température homogène à 0 K et est représenté en vert sur la figure 5.1 (b). Nous notons que ce résultat n'a aucun sens physique et est juste présenté pour validation de la méthode numérique dans le cadre de l'approche analytique décrite ci-dessus.

### 5.1.2 Sources de chaleur

À l'équation de diffusion (5.3), il est possible d'ajouter un terme représentant le chauffage à l'intérieur du satellite et d'écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{H}{\rho C_p}, \quad (5.19)$$

où  $H$  est le taux de génération de chaleur à l'intérieur du satellite.

#### Chauffage radiogénique

Une première source de chauffage interne est due à la désintégration de noyaux radioactifs instables présents dans les silicates du corps planétaire (i.e. la partie rocheuse du satellite). La désintégration d'un isotope radioactif est un processus dissipatif spontané qui transforme un noyau radioactif instable vers un noyau radioactif plus stable et moins massif, convertissant l'énergie de liaison nucléaire en énergie cinétique par rayonnement, en termes de particules neutrinos et anti-neutrinos, et de particules  $\alpha$ ,  $\beta$  et de rayons  $\gamma$ . Cette énergie est ensuite dissipée par collisions entre les particules émises et les atomes présents (voir e.g. Douce [2011]).

De par son indépendance par rapport à l'environnement général de l'atome<sup>3</sup>, la loi de désintégration d'un radioisotope est une exponentielle décroissante donnée par :

$$\frac{dN_i}{dt} = -\lambda_i N(t), \quad (5.20)$$

où  $N_i$  est le nombre d'atomes de l'isotope parent<sup>4</sup>  $i$  et  $\lambda_i$  est la probabilité de désintégration associée. Cette loi illustre la décroissance d'un isotope à un taux proportionnel à l'abondance du radionucléide parent.

---

3. À un temps donné  $t$ , chaque atome d'un type particulier a la même probabilité de désintégration.

4. On appelle *isotope parent* le noyau instable avant désintégration vers l'*isotope fille*, le noyau stable associé.

La résolution de l'équation différentielle (5.20) permet de définir le temps de demi-vie  $t_{dv}$ , durée à partir de laquelle la concentration de l'élément radioactif est diminuée de moitié :

$$t_{dv_i} = \frac{\ln 2}{\lambda_i} .$$

L'émission d'énergie et le taux de désintégration dépendent des types d'isotopes radioactifs. Dans le cas de la Terre, les éléments radioactifs qui contribuent le plus à la génération interne de chaleur sont l'Uranium, le Thorium et le Potassium : plus de 98% de la chaleur radiogénique totale vient de la désintégration d'isotopes uniques d'Uranium  $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ , de Thorium  $^{232}\text{Th}$  et est de l'ordre de 1% pour le Potassium  $^{40}\text{K}$  [Fowler, 1990]. Ces valeurs peuvent varier en fonction du type de roches et du milieu qu'on considère : par exemple, elles sont différentes selon qu'on soit dans le noyau ou le manteau de la Terre. Les éléments radioactifs de courte demi-vie (Aluminium  $^{26}\text{Al}$ , Fer  $^{60}\text{Fe}$  et Manganèse  $^{53}\text{Mn}$ ) interviennent également dans les premiers stades de l'évolution d'un système planétaire mais ont un rôle insignifiant par après. La désintégration de tous ces éléments fournissent un taux de génération d'énergie  $H_{rad_i}$  donné en unité de puissance par kilo d'isotope considéré. Dans cette étude, seules les données pour les éléments radiogéniques de longue demi-vie seront utilisées dans les simulations de chauffage. Les éléments de courte demi-vie seront utilisés pour initialiser le profil de température.

La concentration initiale des éléments radiogéniques  $C_i^0$  de longues demi-vies peut être obtenue via la résolution de l'équation différentielle (5.20) en considérant les concentrations actuelles  $C_i^a$  :

$$C_i^0 = C_i^a \exp(\lambda_i t_s) ,$$

où  $t_s$  est l'âge du système solaire. Dans le cas des éléments radioactifs de courte demi-vie, ces concentrations sont mesurées via la concentration de leurs isotopes filles dans des météorites. L'ensemble des paramètres intervenant dans le chauffage radiogénique est donné dans la table 5.2 et est tiré du livre [Douce, 2011].

Nous validons notre approche du chauffage radiogénique par deux exemples présentés par Douce [2011]. Ceux-ci sont présentés dans l'annexe G.

En prenant les concentrations cohérentes avec celles du manteau de la Terre [Kargel et Lewis, 1993], le taux actuel de production de chaleur radioactive pour les fractions de masse et de volume de Miranda est de  $7 \times 10^{-12} \text{ W kg}^{-1}$ . Avec une chaleur spécifique fixée à  $C_p = 900 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , l'augmentation de température due à la désintégration des éléments radioactifs est de 0.2 K pour 1 million d'années. Les éléments radiogéniques de courte demi-vie peuvent fournir  $2 \times 10^{-7} \text{ W kg}^{-1}$  pour les premiers millions d'années de l'évolution.

TABLE 5.2 – Radioisotopes intervenant dans le chauffage radiogénique. Les paramètres  $H_{rad_i}$ ,  $\lambda_i$ ,  $t_{dv_i}$ ,  $C_i^a$  et  $C_i^0$  sont respectivement le taux de génération d'énergie, la constante de décroissance, le temps de demi-vie, les concentrations actuelles et initiales de l'isotope  $i$ . Tableau repris de Douce [2011].

Isotope	$H_{rad_i}$ W kg <sup>-1</sup>	$\lambda_i$ s <sup>-1</sup>	$t_{dv_i}$ yrs	$C_i^a$	$C_i^0$
<sup>238</sup> U	$9.46 \times 10^{-5}$	$4.19 \times 10^{-18}$	$4.47 \times 10^9$	0.992 75	
<sup>235</sup> U	$5.69 \times 10^{-4}$	$3.12 \times 10^{-17}$	$7.04 \times 10^8$	0.007 20	
<sup>232</sup> Th	$2.64 \times 10^{-5}$	$1.56 \times 10^{-18}$	$1.41 \times 10^{10}$	1	
<sup>40</sup> K	$2.92 \times 10^{-5}$	$1.72 \times 10^{-17}$	$1.28 \times 10^9$	$1.17 \times 10^{-4}$	
<sup>26</sup> Al	$4.55 \times 10^{-1}$	$3.06 \times 10^{-14}$	$7.17 \times 10^5$	0	$5.8 \times 10^{-5}$
<sup>60</sup> Fe	$7.19 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-14}$	$1.50 \times 10^6$	0	$7 \times 10^{-7}$
<sup>53</sup> Mn	$6.38 \times 10^{-3}$	$5.87 \times 10^{-15}$	$3.74 \times 10^6$	0	$9 \times 10^{-6}$

### Chauffage par marée

Comme seconde source de chaleur, nous considérons le chauffage par marée dans le satellite. La dissipation par marée peut produire assez de chaleur pour maintenir les températures internes mais dépend des excentricités orbitales ainsi que de la structure interne et de la rhéologie. La quantité qui caractérise la dissipation globale résultante de la rhéologie non-élastique est la fonction de dissipation  $Q$  (2.6). La distorsion par marée du corps est dépendante du temps et mène à un chauffage interne. Dans le cas d'un problème des 2 corps, l'énergie du système est donnée par :

$$E = -\frac{Gm_0}{2a} . \quad (5.21)$$

Pour un corps en rotation synchrone sur une orbite excentrique, le taux de dissipation d'énergie est donné par :

$$\frac{dE}{dt} = \left( \frac{k_2}{Q} \right)_s \frac{Gm_0^2 n R_s^5}{a^6} \left( \frac{21}{2} e^2 + \frac{3}{2} \sin^2 O \right) , \quad (5.22)$$

où  $O$  est l'obliquité de l'orbite. Cette formule découle de la dérivée en temps de l'équation (5.21) associée au terme dépendant du rapport  $(k_2/Q)_s$  de la formulation en  $\dot{a}$  donnée par (2.8). À noter que le terme en obliquité est ajouté dans ce cas-ci. Une forme plus complète de l'équation (2.8) est présentée dans Williams *et al.* [2001] et permet d'obtenir l'expression ci-dessus.

La dérivation de la formule (5.22) suppose que le corps est incompressible, que la rotation est uniforme et synchrone. On peut voir cette dissipation comme

provenant de deux sources indépendantes dans la marée : la variation dans le temps de la distance due à l'effet de marée sur la planète et la libration optique (le mouvement de balancement d'un satellite en rotation uniforme par rapport à la planète qui résulte du mouvement non uniforme sur l'orbite elliptique).

Différents paramètres font varier cette dissipation et il sera important lors du couplage de considérer différentes possibilités.

Au niveau des paramètres physiques, plus le satellite est grand ( $R_s$ ), plus sa dissipation sera élevée. On ne peut cependant pas avoir un satellite de trop grande taille dans notre étude car le transfert de chaleur est effectué par conduction. Or, lorsque le rayon augmente et qu'un gradient de température entre le centre et la surface du satellite s'installe, le transfert de chaleur à l'intérieur d'un fluide s'effectue par convection, ce qui n'a pas été considéré dans le code.

La dissipation dépend également de trois paramètres : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité de l'orbite  $e$  et son obliquité  $O$ , ces deux derniers paramètres pouvant varier selon les résonances rencontrées. La dépendance en demi-grand axe est inversement proportionnelle et indique que plus le satellite est proche de sa planète, plus la dissipation est élevée : ceci est logique puisque l'effet gravitationnel entre les corps s'en trouve renforcé. Bien que son effet soit minime, nous avons gardé le terme en obliquité et donc l'information de la haute inclinaison de Miranda dans le code couplé. La valeur de l'obliquité est calculée à l'état de Cassini 1 suivant la méthode décrite dans Noyelles [2010] considérant une forme non-obligatoirement hydrostatique. On écrit :

$$O_{eq} \approx \frac{\sin I}{\beta/\dot{\Omega} + \cos I} ,$$

où  $\dot{\Omega}$  est approché par (voir e.g. Murray et Dermott [1999]) :

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 n \left( \frac{R_p}{a} \right)^2$$

et

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{(C - A)n}{C} ,$$

où  $A$  et  $C$ , les principaux moments d'inertie, dépendent de la forme du satellite :

$$A = \iiint \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$C = \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz .$$

Dans le cas d'une densité constante, ils se simplifient par :

$$A = \frac{4}{15} \rho \pi abc (b^2 + c^2)$$

$$C = \frac{4}{15} \rho \pi abc (a^2 + b^2) ,$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les demi-axes de l'ellipsoïde qui approchent la forme du satellite. Leurs valeurs sont tirées de l'article Archinal *et al.* [2011].

Finalement, la dissipation interne donnée par la fonction de dissipation  $Q$  joue également un rôle. Plus la valeur de  $Q$  sera petite (associée à une grande dissipation), plus l'énergie de dissipation par marée sera élevée. Comme déjà signalé au chapitre 2, la valeur de cette fonction de dissipation est méconnue. Cependant, les distorsions dues aux marées et les déformations résultantes dans le mélange roches-silicates peuvent être calculées par des modèles dits *rhéologiques* qui combinent les déformations élastiques et visqueuses [Karato, 1998]. La façon de modéliser cette fonction  $Q$  via ces modèles est l'objet principal de la section suivante.

### 5.1.3 Modèles rhéologiques

L'étude de l'évolution de l'intérieur d'un satellite est effectuée via des modèles rhéologiques qui étudient les changements de forme et d'écoulement de la matière. Ceux-ci permettent donc de modéliser la déformation  $\epsilon$  d'un matériau lorsqu'il est soumis à une contrainte  $\sigma$ . La difficulté repose sur la modélisation d'un corps dit « viscoélastique » devant combiner

1. les déformations associées aux contraintes du solide élastique et,
2. la vitesse de cisaillement entraînant des contraintes sur le fluide visqueux.

Les modèles rhéologiques mis en place dans le cadre de ce travail considèrent essentiellement des montages en série ou en parallèle de ressorts pour le comportement élastique du corps et d'amortisseurs pour le comportement visqueux. Les modèles rhéologiques se basent sur la théorie de la mécanique des milieux continus et ne constituent pas en soi l'objectif principal de cette thèse. Différents ouvrages de base (voir e.g. Mavko *et al.* [2009]) peuvent compléter les informations regroupées ici. Le développement théorique ne sera dès lors pas présenté de manière détaillée mais se base partiellement sur le travail de Tobie [2003].

Le choix et l'implémentation des modèles rhéologiques ont été réalisés avec la collaboration de mon collègue Özgür Karatekin de l'Observatoire Royal de Belgique.

### Généralités

Sur de courtes périodes de temps, le matériau se déforme de manière élastique, i.e. la déformation est réversible et le matériau reprend sa forme initiale lorsque la contrainte cesse. On considère également que la déformation est linéaire, i.e. proportionnelle aux efforts. La contrainte est définie comme



le rapport entre la force mise en jeu et l'aire de la surface sur laquelle elle est appliquée. Cette contrainte implique une déformation correspondant à une modification de dimension(s) du solide. Les modules d'élasticité caractérisent la réaction du matériau à la contrainte appliquée. Ils sont de trois types et dépendent de la force considérée. On peut citer :

- le module de Young  $E$  pour une contrainte de traction ,
- le module de rigidité ou de cisaillement  $\mu$  pour une contrainte de cisaillement ,
- le module de compressibilité  $K$  pour une contrainte de compression.

La déformation élastique d'un corps est modélisée à l'aide de la loi de Hooke bien connue dans le cas de la déformation d'un solide par traction ou compression (symbole du ressort) et qui peut être généralisée en 3 dimensions pour un matériau isotrope par :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{ii} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad (5.23)$$

où les éléments du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  sont reliés aux éléments du tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}$ . Le paramètre  $\lambda = K - \frac{2}{3} \mu$  est le premier coefficient de Lamé et dépend des modules élastiques de compressibilité  $K$  et de cisaillement  $\mu$ .

Sur des échelles de temps très longues, le matériau se déforme comme un fluide visqueux : la déformation est alors plastique et irréversible. Lors d'un mouvement laminaire de fluide visqueux, les différentes couches de liquides dissipent de l'énergie par friction. Cette résistance à l'écoulement des différentes couches les unes sur les autres est donnée par la viscosité *de cisaillement*  $\nu$ . Dans le cadre d'un fluide newtonien, i.e. un fluide pour lequel la loi liant contraintes et déformations est linéaire, la contrainte est liée au taux de déformation via la loi :

$$\sigma_{ij} = \eta \dot{\epsilon}_{ij} \quad i, j = 1, \dots, 3 .$$

### Modèle de Maxwell

Le modèle rhéologique de Maxwell lie les comportements élastique et visqueux en considérant un montage en série d'un modèle type ressort avec un modèle type amortisseur<sup>5</sup>. Suivant la relation décrite par Peltier [1974], dans le cadre d'un corps de Maxwell, on peut relier les éléments du tenseur de contrainte et du tenseur de déformation par :

$$\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\mu}{\eta} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} + \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) \dot{\epsilon}_{ii} \delta_{ij} ,$$

---

5. Dans le cas d'un montage en série, les contraintes s'additionnent et les déformations sont les mêmes.

où la notation d'Einstein est utilisée pour la sommation sur les indices. Par transformation de Fourier de cette dernière équation, on peut obtenir une relation type loi de Hooke (5.23) (voir e.g. Tobie [2003]) :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}(\nu) \tilde{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2 \tilde{\mu}(\nu) \tilde{\epsilon}_{ij} ,$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\nu) &= K - \frac{2}{3} \tilde{\mu}(\nu) \\ \tilde{\mu}(\nu) &= \frac{\mu \eta^2 \nu^2}{\mu^2 + \eta^2 \nu^2} + i \frac{\mu^2 \eta \nu}{\mu^2 + \eta^2 \nu^2} , \end{aligned}$$

où  $\tilde{\mu}$  est la rigidité complexe. La fréquence de forçage de marée  $\nu$  est égale au moyen mouvement  $n$  d'un satellite en rotation synchrone.  $\mu$  et  $\eta$  sont la rigidité élastique et la viscosité respectivement.

La rigidité complexe  $\tilde{\mu}$  est obtenue par le principe de correspondance exposé par Peltier [1974]. La rhéologie de Maxwell fournit la rhéologie phénoménologique non-élastique minimale pour décrire la dissipation ayant lieu lors d'un forçage par marée. Le comportement de relaxation des contraintes est décrit en termes de temps de Maxwell  $\tau_M = \eta/\mu$ . Pour des périodes de forçage inférieures au temps caractéristique de Maxwell  $t < \tau_M$ , la réponse élastique prédomine et  $\tilde{\mu} \approx \mu$ . Les effets dissipatifs sont négligeables. Pour des périodes de forçage plus longues  $t > \tau_M$ , la réponse visqueuse prédomine et le matériau se comporte comme un fluide  $\tilde{\mu} \approx 0$ . Le temps de relaxation de Maxwell pour des satellites de glace est de l'ordre de quelques jours avec une viscosité de  $\eta = 10^{15}$  Pa s, et une rigidité  $\mu = 4.5 \times 10^9$  Pa.

Le modèle de Maxwell tend à surestimer la réponse élastique des corps associés à de hautes viscosités. Cependant, le modèle ne dépend que de deux paramètres, ce qui constitue son plus grand avantage.

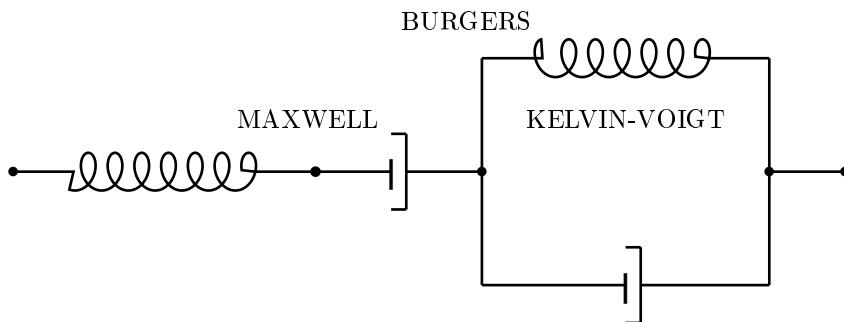


FIGURE 5.2 – Le modèle rhéologique de Burgers est un montage en série d'un modèle de Maxwell avec un modèle de Kelvin-Voigt.

### Modèle de Burgers

Le modèle rhéologique de Burgers lie les comportements élastique et visqueux en considérant un montage en série d'un modèle de Maxwell avec un modèle de Kelvin-Voigt, qui n'est autre que le modèle liant les comportements élastique et visqueux en considérant un montage en parallèle d'un modèle type ressort avec un modèle type amortisseur <sup>6</sup>.

Le modèle de Burgers est caractérisé par deux viscosités, une à long terme et une à court terme et est, dès lors, plus général que le modèle de Maxwell pour décrire le comportement non-élastique des matériaux [Karato, 1998] :

$$\tilde{\mu}(\nu) = \frac{\nu^2 (C_1 - \eta_1 C_2 / \mu_1)}{C_2^2 + \nu^2 C_1^2} + i \frac{\nu (C_2 + \eta_1 \nu^2 C_1 / \mu_1)}{C_2^2 + \nu^2 C_1^2},$$

avec

$$C_1 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\eta_1}{\mu_1 \eta_2} + \frac{1}{\mu_2}$$

$$C_2 = \frac{1}{\eta_2} - \frac{\eta_1}{\mu_1 \mu_2} \nu^2.$$

Le modèle de Burgers est, dans certains cas, plus efficace que celui de Maxwell. Par exemple, Reeh *et al.* [2003] l'appliquent avec succès dans une étude sur la réponse des glaciers terrestres aux forces de marée. Dans la recherche des satellites composés de glace, le modèle de Burgers a été appliqué pour calculer le despinning de Japet [Robuchon *et al.*, 2010] et la réponse aux marées d'Encelade [Shoji *et al.*, 2013]. Comme Shoji *et al.* [2013], nous supposons  $\mu_2 = \mu_1$  et nous faisons varier  $\eta_2/\eta_1$  entre 17 et 50. Comme limite supérieure, nous pouvons aussi considérer  $\eta_2/\eta_1 = 2500$  comme dans [Shoji *et al.*, 2013].

La rhéologie de Burgers est plus difficile que le modèle de Maxwell à manipuler puisqu'elle requiert l'ajustement de 4 paramètres.

### Modèle d'Andrade

Le modèle rhéologique d'Andrade est un modèle empirique qui se base sur un modèle de fluide visqueux dans les métaux [Andrade, 1910]. Retravaillé notamment dans le cadre de corps proches de résonances spin-orbite et soumis aux marées [Efroimsky, 2012], il est donné par :

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\tilde{\mu}} + \nu^{-\alpha} \beta \cos \frac{\alpha\pi}{2} \Gamma(\alpha + 1) - i \frac{1}{\eta\nu} - \nu^{-\alpha} \beta \sin \frac{\alpha\pi}{2} \Gamma(\alpha + 1),$$

---

6. Dans le cas d'un montage en parallèle, les contraintes sont les mêmes et les déformations s'additionnent.

où le paramètre  $\alpha = 0.33$  ( $0.3 - 0.38$ ) est fixé comme pour le satellite Encelade [Rambaux *et al.*, 2010],

$$\beta = \mu^{\alpha-1}/\eta^\alpha \approx \left[ 1 \times 10^{-13}; 1 \times 10^{-11} \right],$$

et  $\Gamma$  est la fonction gamma. La multiplicité des paramètres à fixer dans ce modèle rend sa manipulation compliquée et difficile comparée à celles des modèles de Burgers et de Maxwell. Cependant, contrairement au modèle de Maxwell, le modèle d'Andrade tient compte de la réponse inélastique de la glace lorsqu'elle est forcée par les marées et dispose dès lors d'un temps caractéristique inférieur à celui de Maxwell [Efroimsky, 2012] ayant pour conséquence une apparition du régime visqueux plus rapidement.

### 5.1.4 Paramètres thermiques physiques

Les paramètres rhéologiques exacts sont peu connus pour les satellites du système solaire extérieur. Leurs propriétés sont donc estimées via des approximations considérant un satellite homogène composé de glaces et de silicates. Dans ce cas, les paramètres physiques<sup>7</sup> que sont la conductivité thermique, la chaleur spécifique, la viscosité et la rigidité sont tous calculés comme combinaisons des paramètres connus dans le cas de ces composants. Ils sont ainsi fonctions de la composition du corps mais également de la température de fusion de la glace [Castillo-Rogez *et al.*, 2007]. La fraction de masse de silicates  $x_s$  est déterminée par les densités de chaque composition :

$$x_s = \frac{1 - \rho_g/\rho_i}{1 - \rho_g/\rho_s}, \quad (5.24)$$

où  $\rho_g = 917 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_s = 2500 \text{ kg/m}^3$  et  $\rho_i$  sont respectivement les densités de la glace, des silicates et du satellite  $i$ . La fraction de volume de silicate  $f_s$  dépend de la fraction de masse  $x_s$  et est donnée par :

$$f_s = \frac{x_s}{x_s + \rho_s/\rho_i(1 - x_s)}. \quad (5.25)$$

Considérant les valeurs typiques de densité précitées, les fractions de masse et de volume sont respectivement  $x_s = 37\%$  et  $f_s = 45\%$  pour Miranda.

### Conductivité thermique et chaleur spécifique

Suivant Castillo-Rogez *et al.* [2007], la conductivité thermique et la chaleur spécifique des satellites sont des combinaisons linéaires de la conductivité thermique et de la chaleur spécifique de la glace et des silicates. On définit la conductivité thermique  $k$  par :

$$k = f_s k_s + (1 - f_s) k_g,$$

---

7. Un résumé des valeurs obtenues pour Miranda est présenté dans la table 5.1.

où  $k_s = 4.2$  W/m/K et  $k_g = 5.4$  W/m/K sont les conductivités thermiques des silicates et de la glace respectivement. On définit la chaleur spécifique  $C_p$  comme :

$$C_p = x_s C_{ps} + (1 - x_s) C_{pg} ,$$

où  $C_{ps} = 920$  J/kg/K et  $C_{pg} = 888.7$  J/kg/K sont les chaleurs spécifiques des silicates et de la glace respectivement.

### Rigidité

Les propriétés élastiques sont estimées par l'approximation de Voigt-Reuss-Hill qui fournit la moyenne arithmétique entre les modèles de Voigt et de Reuss [Mavko *et al.*, 2009]. La rigidité de Voigt est donnée par :

$$\mu_{Voigt} = x_s \mu_s + (1 - x_s) \mu_g$$

et celle de Reuss par :

$$\mu_{Reuss} = \left[ \frac{x_s}{\mu_s} + \frac{(1 - x_s)}{\mu_g} \right]^{-1} ,$$

où  $\mu_s = 65$  GPa et  $\mu_g = 4.5$  GPa sont respectivement les rigidités des silicates et de la glace.

### Viscosité

La rhéologie de la glace est compliquée : elle implique différents mécanismes de déformation, dont certains sont non-newtoniens. Cependant, les détails exacts de la rhéologie de la glace ont de très faibles effets sur les résultats finaux. Nous supposons donc une rhéologie simplifiée pour la glace, avec une viscosité newtonienne  $\eta(T)$  qui prend la forme suivante [Parmentier et Zuber, 2007] :

$$\eta = \eta_0 \exp \left[ \frac{E_a}{R_g T_m} \left( \frac{T_m}{T} - 1 \right) \right] , \quad (5.26)$$

où  $\eta_0$  est la viscosité au point de fusion, considérée à  $10^{13}$  Pa s,  $E_a = 50 \cdot 10^3$  J/mol est l'énergie d'activation et  $R_g = 8.3144621$  J/mol/K, la constante de gaz. Le paramètre  $T_m = 273$  K est la température de fusion, i.e. la température de référence faisant passer un matériau de l'état solide à l'état liquide. La valeur de  $T_m$  peut diminuer en fonction des éléments présents dans le corps. En effet, une température  $T_m = 273$  K correspond à la température de fusion pour l'eau pure. Supposant que le corps est composé de clathrate (i.e. composé de glace dans laquelle du gaz est emprisonné), cette température descend jusque 200 K. Cette diminution entraîne une décroissance de la viscosité et ainsi que du temps caractéristique de Maxwell, l'objectif étant de faire converger le temps de Maxwell vers une valeur du même ordre que les périodes orbitales.

La viscosité joue un rôle prépondérant dans l'évolution thermique : l'objectif est qu'elle ne soit pas trop élevée. Une borne supérieure est d'ailleurs fixée à  $10^{19}$  Pa s. En résumé, l'ordre de grandeur de viscosité pour un corps viscoélastique est de  $10^{15}$  Pa s. Une viscosité de l'ordre de  $10^{12}$  Pa s peut déjà conduire à un corps liquide dans lequel, la rigidité n'ayant plus d'effet, il n'y a plus de dissipation. Pour comparaison, la viscosité de la croûte de la Terre est de l'ordre de  $10^{22}$  Pa s (rigide).

La viscosité étant inversement proportionnelle à la température du satellite, plus celui-ci se refroidit, plus la viscosité augmente. Dans les deux cas, la viscosité varie selon une exponentielle : de grands changements de température ne sont pas nécessaires au renversement d'attitude de la viscosité.

### 5.1.5 Paramètres des marées

Suivant Hussmann *et al.* [2006], considérant la fréquence de forçage de marée égale au moyen mouvement d'un satellite en rotation synchrone, la fonction de dissipation  $Q$  est défini par :

$$\begin{aligned} Q(\tilde{\mu}) &= \frac{Re(k_2)}{Im(k_2)} \\ &= \frac{Re(\tilde{\mu})}{Im(\tilde{\mu})} = n\tau_M, \end{aligned} \tag{5.27}$$

où  $n$  est le moyen mouvement du satellite et  $\tau_M = \mu/\eta$  est le temps de relaxation de Maxwell. Le nombre de Love  $k_2$  est défini par (2.7) pour une réponse élastique  $\mu \approx \tilde{\mu}$ .

Les modèles de Maxwell, Burgers et Andrade décrits au début de la section permettent d'obtenir une expression pour la fonction de dissipation  $Q$ , différente en fonction du modèle considéré. La figure 5.3 compare les valeurs de  $Q$  en fonction de la température de fusion choisie pour les 3 modèles rhéologiques définis en début de section. Pour le calcul de la viscosité, une température moyenne de 150 K a été dans ce cas supposée.

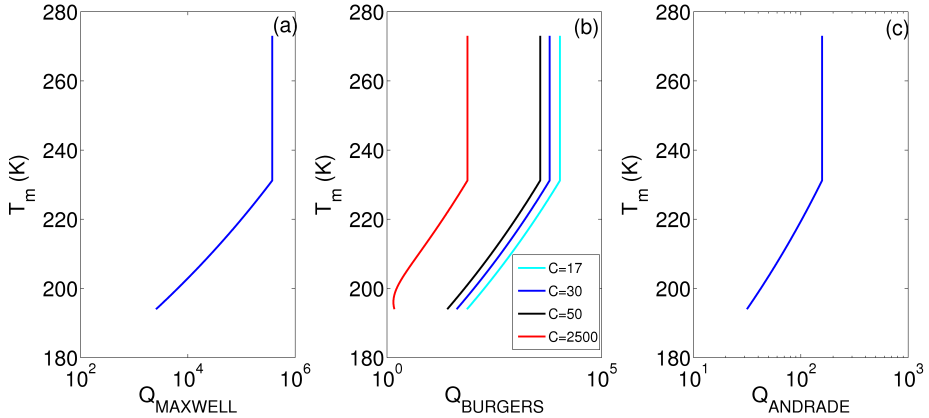


FIGURE 5.3 – Valeur de  $Q$  obtenue avec le modèle Maxwell (a), de Burgers (b) et d’Andrade (c) en fonction de la température de fusion considérée. La température moyenne du satellite est fixée à 150 K.

Comme explicité dans l’introduction, la théorie de ce chapitre est subdivisée en deux parties comprenant un module thermique et un module dynamique. Ici se termine la théorie du module thermique se référant à l’évolution intérieure des satellites. La section suivante comprend le module dynamique présentant les équations du mouvement d’un problème moyenné à 3 corps.

## 5.2 Module dynamique

Le module dynamique construit une moyennisation de l’Hamiltonien à  $N$  corps dans le cas particulier d’une résonance en moyen mouvement 3 : 1 entre deux satellites.

Nous avons au départ couplé le module thermique au problème des  $N$  corps complet, ce qui s’est avéré non-efficace car les échelles de temps caractéristiques ne correspondent pas entre les deux approches. La seconde approche consiste à étudier une version moyennée de l’Hamiltonien. L’équation de dissipation de marée (5.22) dépend de différents paramètres physiques et orbitaux et notamment, il existe une dépendance en  $e^2$ , pouvant augmenter la dissipation de manière intensive. On soupçonne dès lors un chauffage thermique plus efficace lorsque les excentricités augmentent (voir e.g. Peale [1999]), d’où l’intérêt d’un modèle contenant les excentricités. Cependant, la haute inclinaison de Miranda est inhérente au problème et nous souhaitons dès lors conserver cette dimension dans le problème.

La première idée d'Hamiltonien moyenné considèrait l'Hamiltonien à 4 degrés de liberté composé de la somme de l'Hamiltonien (4.2) développé dans le chapitre 4 et de l'Hamiltonien associé en excentricité développé en annexe F. Cette approche s'est avérée être un échec de par le manque d'un degré de liberté dans les équations du mouvement permettant de fixer le rapport des demi-grands axes à une constante lors de la capture dans une résonance. Les yeux des résonances en excentricité et inclinaison se chevauchaient. Ne trouvant pas de solution pour ajouter ce degré de liberté, nous avons mis en place une nouvelle approche.

Nous implémentons dès lors une méthode expliquée dans le cas du système de Saturne dans le travail de Champenois [1998], qui sélectionne de manière précise les termes nécessaires à la modélisation et obtient un Hamiltonien moyenné dépendant des inclinaisons et des excentricités en même temps.

Le modèle considère un problème des 3 corps décrit par l'Hamiltonien en coordonnées de Jacobi (4.8). De même que dans le chapitre 4, on développe le potentiel perturbateur dû au troisième corps au second degré en excentricité et inclinaison via les séries de Fourier et on obtient les termes résonants liés à la résonance 3 : 1 de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_{res}$  (4.12) dépendant de fonctions de Laplace définies dans (4.13). En particulier, le potentiel perturbateur dépend du corps auquel il est appliqué et est donné pour les termes résonants par :

$$\begin{aligned} V_{12}^R &= \frac{Gm_0m'}{a'} \left( \sum_{k=1}^6 f_k \cos 2\theta_k - a' V_E \right) \\ V_{21}^R &= \frac{Gm_0m}{a'} \left( \sum_{k=1}^6 f_k \cos 2\theta_k - a' V_I \right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} V_E &= -\frac{27}{8} e_2^2 \cos(\lambda - 3\lambda' + 2\varpi') \\ V_I &= -\frac{3}{8} e_2^2 \cos(\lambda - 3\lambda'_2 + 2\varpi') , \end{aligned}$$

pour une perturbation externe et interne respectivement.

La partie séculaire de ce potentiel  $V^S$  comprend les termes indépendants et ceux liés à la différence des nœuds et péricentres repris dans l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_{sec}$  (4.14), et associés aux fonctions de Laplace (4.15).



Les termes d'aplatissement seront donnés par une version moyennée au second ordre de chaque terme donnée par (voir e.g. Murray et Dermott [1999]) :

$$V^A = \frac{Gm_0}{2a} \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{9}{8} J_2^2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 \right] e^2 \\ - \frac{Gm_0}{2a} \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{27}{8} J_2^2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 \right] \sin^2 I ,$$

où  $R_p$  est le rayon moyen de la planète.

Le potentiel perturbateur total est donc écrit par :

$$V = V^R + V^S + V^A . \quad (5.28)$$

### 5.2.1 Équations du mouvement

Les équations définies jusqu'à présent dépendent des éléments orbitaux des satellites  $(a, e, i, \varpi, \Omega)$ . On choisit ici de travailler avec les variables de Lagrange (voir e.g. [Duriez, 1977]) (cf. Annexe C) :

$$z = e \exp(\sqrt{-1} \varpi) \\ \zeta = \gamma \exp(\sqrt{-1} \Omega) ,$$

ces variables se référant à Miranda, les expressions avec les variables primées sont équivalentes et se réfèrent à Umbriel. La définition de ces variables permet d'éviter l'indétermination des péricentres et/ou nœuds lorsque les excentricités et/ou les inclinaisons sont nulles. Dans ces variables et se basant sur Duriez [1977], les équations du mouvement de Lagrange sont écrites comme :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{-1} \phi}{na^2} \left[ 2 \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} + \frac{\sqrt{-1}}{(1+\phi)} z \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{z}{2\phi^2} \left( \zeta \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial V}{\partial \bar{\zeta}} \right) \right] \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{2na^2\phi} \left[ \frac{\partial V}{\partial \bar{\zeta}} + \sqrt{-1} \zeta \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \zeta \left( z \frac{\partial V}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right) \right] \\ \frac{d\lambda}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\phi}{na^2(1+\phi)} \left( z \frac{\partial V}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right) \\ + \frac{1}{2na^2\phi} \left( \zeta \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial V}{\partial \bar{\zeta}} \right) ,$$

avec  $\phi = \sqrt{1 - z\bar{z}}$ . L'expression du potentiel perturbateur  $V$  est donnée par (5.28) dans les cas de Miranda et Umbriel avec l'expression adaptée du potentiel perturbateur  $V^R$  selon que la perturbation soit interne ou externe. Nous

intégrons donc un ensemble de 11 équations différentielles :

$$\left( \frac{da}{dt}, \frac{da'}{dt}, \frac{dk}{dt}, \frac{dk'}{dt}, \frac{dh}{dt}, \frac{dh'}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dq'}{dt}, \frac{dp}{dt}, \frac{dp'}{dt}, \frac{d\Psi}{dt} \right), \quad (5.29)$$

les variables  $k$ ,  $h$ ,  $p$  et  $q$  étant définies par :

$$\begin{aligned} k &= e \cos \varpi = \text{Re}(z) \\ h &= e \sin \varpi = \text{Im}(z) \\ q &= \gamma \cos \Omega = \text{Re}(\zeta) \\ p &= \gamma \sin \Omega = \text{Im}(\zeta), \end{aligned}$$

la version primée étant équivalente. La variable  $\Psi = 3\lambda' - \lambda$  est l'angle à la résonance exacte.

Cet ensemble d'équations de mouvement (5.29) est intégré avec le même intégrateur prédicteur-correcteur ABM d'ordre 10. Afin de valider les résultats de l'intégration du modèle moyenné présenté ici, nous procédons de la même manière que dans le chapitre 4 en présentant une carte dans le domaine rapport de demi-grands axes versus angle résonant  $\theta_1$  dans l'échelle de couleurs de variations du demi-grand axe de Miranda.

La figure 5.4 (a) présente le résultat de l'intégration du problème des 3 corps. Il considère les perturbations gravitationnelles entre Uranus, Miranda et Umbriel et l'effet d'aplatissement et contient en particulier tous les termes de courtes périodes. La figure 5.4 (b) montre le résultat des intégrations numériques des équations du mouvement (5.29). Il contient les mêmes perturbations que dans le système complet mais considère uniquement les longues périodes. On observe que les deux figures sont similaires avec plus de précision dans le cas de l'intégration du système complet. Cependant, notre forme moyennée maintient les points globaux de la dynamique de la résonance en moyen mouvement 3 : 1 entre Miranda et Umbriel avec la présence de la large séparatrice délimitant le bord de la résonance. On distingue également les deux zones de résonances secondaires dans le centre de libration jouant un rôle dans la sortie de la résonance primaire (cf. Chapitre 4). On conclut donc cette section par la validation de la forme moyennée dans l'étude de la partie dynamique du problème.

## 5.3 Couplage thermodynamique

### 5.3.1 Procédure

Les études couplées mêlant la dynamique des orbites à l'évolution interne des satellites sont assez rares. Comme nous le verrons par la suite, elles engendrent des difficultés lors de la combinaison des deux approches : les temps

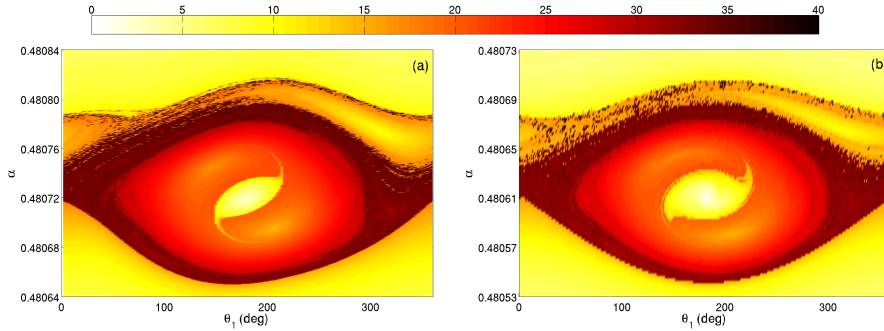


FIGURE 5.4 – Espaces de phase dans le domaine rapport de demi-grands axes  $\alpha$  versus angle résonant  $\theta_1$  résultant d'un problème des 3 corps Uranus, Miranda, Umbriel avec l'intégrateur Adams-Bashforth-Moulton sur 1500 ans (a) et sa version moyennée (b). Dans le cas de la version complète, le pas d'intégration est fixé à 1/80 jour. Les conditions initiales sont les actuelles (cf. Tables B.1, B.2 et B.3) excepté pour l'anomalie moyenne  $M$ , le demi-grand axe  $a$  et l'inclinaison de Miranda  $I$ . Les deux premières variables sont fixées respectivement entre  $[0^\circ - 360^\circ[$  et  $[127850 \text{ km} - 127900 \text{ km}]$ . Pour la version moyennée, le pas d'intégration est fixé à 17/300 ans. Le demi-grand axe  $a$  est dans l'intervalle  $[127820 \text{ km} - 127870 \text{ km}]$ . L'inclinaison initiale de Miranda est de  $4.338^\circ$  dans les deux cas. L'échelle de couleur considère la variation en demi-grand axe  $a$  (km) dans les deux simulations.

d'évolution caractéristiques, par exemple, sont totalement différents avec des changements dans la dynamique orbitale se faisant sur des temps de quelques jours/années alors que la température intérieure d'un satellite varie sur des échelles de l'ordre de plusieurs millions d'années. Il est donc parfois nécessaire de faire un choix entre une évolution dynamique plausible et une évolution thermique ayant un sens physique.

Dans Schubert *et al.* [2010], les auteurs analysent le rôle des résonances dans l'évolution interne d'un satellite : ils démontrent l'intérêt du forçage de l'excentricité sur le chauffage interne de celui-ci. En particulier, dans le cas des satellites galiléens, le chauffage par marée d'Io excède sans difficulté le chauffage par les éléments radiogéniques impliquant le volcanisme bien connu à sa surface. Un élément dynamique important est la résonance de Laplace impliquant les trois satellites Io, Europe et Ganymède dont l'angle de libration est donné par :

$$\theta = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 ,$$

avec  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , les longitudes moyennes d'Io, d'Europe et de Ganymède respectivement. Cette configuration est stable et a la particularité de faire évoluer le satellite Io selon des cycles d'un état chaud à un état froid, et vice-versa,

à mesure que les satellites s'enfoncent dans la résonance (augmentation des excentricités et donc de la température interne) ou en ressortent (diminution des excentricités par dissipation et donc de la température interne). Ce processus de chauffage par cycles est proposé par Ojakangas et Stevenson [1986]. Les deux points importants à noter dans le cadre de ce système sont le fait que la résonance entre les trois satellites est maintenue et que le transfert de chaleur dans Io est un transfert par convection dû à sa taille plus importante et à une température initiale plus élevée<sup>8</sup>.

Sur le même système, citons le travail de Showman *et al.* [1997], qui présente un problème dynamique et thermique couplé pour le satellite Ganymède mais dans le cadre d'un satellite à température homogène, sans variation radiale de la température.

Dans le cas du système uranien, il n'y a, à notre connaissance, aucune approche couplée des phénomènes dynamique et thermique. Les auteurs qui ont abordé les questions thermiques essentiellement dans les cas de Miranda et d'Ariel (Dermott *et al.* 1988; Peale 1988; Tittlemore et Wisdom 1988, 1990) ont plutôt envisagé les deux évolutions séparément, utilisant les données obtenues dans l'évolution dynamique comme sources pour l'évolution thermique.

L'idée ici est de considérer l'évolution comme un ensemble thermodynamique où les informations s'échangent dans les deux sens. Les paramètres thermiques usuels ont été conservés de sorte que l'analyse physique soit cohérente. Différents modèles rhéologiques définissant des valeurs diverses de dissipation à l'intérieur de Miranda sont également pris en compte (cf. Section 5.1.3).

L'idée du couplage est présentée dans le schéma à la figure 5.5. D'un point de vue dynamique, les équations du mouvement moyennées (5.29) sont intégrées et permettent d'obtenir les éléments orbitaux. Ceux-ci interviennent dans le module thermique lorsque l'EDP (5.19), avec ses termes de sources, est résolue, et en particulier dans le terme de chauffage par marée (5.22). Cette résolution de l'équation de la chaleur est effectuée tous les 100 ans dans le cas général. Lors de la capture et l'évolution dans la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel, l'appel au module thermique est effectué à chaque pas de temps pour tenir compte des changements engendrés dans les éléments orbitaux, impliquant des modifications dans la dissipation par marée (5.22). Le résultat du module thermique est essentiellement la viscosité du satellite qui dépend de la température obtenue. Cette viscosité permet de calculer via les modèles de Maxwell, de Burgers ou d'Andrade, la fonction  $Q$  associée à la dissipation à l'intérieur du satellite. Le nouveau rapport  $(k_2/Q)_s$  pour le satellite est alors renvoyé au module dynamique.

---

8. Le chauffage par convection s'avère plus efficace que celui par conduction car il génère des mouvements de fluides.

Notre modèle tente dès lors d'approcher l'évolution suivante : suite à une phase d'accrétion, l'intérieur du satellite commence à se refroidir puisque le chauffage interne dominé par la désintégration des éléments radiogéniques n'est pas suffisant pour compenser le refroidissement. La viscosité augmente. Si le satellite est capturé dans une résonance orbitale qui force les excentricités suffisamment, le chauffage par marée devient important et domine le chauffage radiogénique. Dans ce cas, la viscosité diminue avec l'augmentation de température. Si la température interne devient suffisante, alors le satellite se différencie en plusieurs couches i.e. les éléments plus lourds migrent vers le centre et constituent un noyau.

Comme signalé précédemment, la dissipation par marée amortit les excentricités, ce qui a comme conséquence une diminution de l'énergie de marée et une nouvelle dominance du chauffage par les éléments radiogéniques. Il en résulte une nouvelle phase de refroidissement du satellite, transformé par son chauffage par marée dû à la traversée de la résonance (cf. Équation (5.22)).

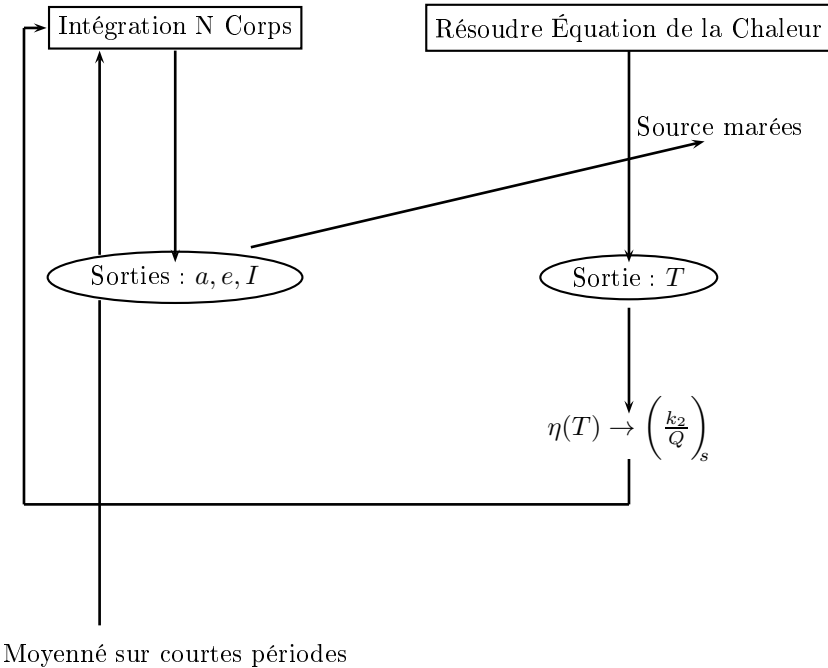


FIGURE 5.5 – Schéma présentant le principe du code couplé.

### 5.3.2 Résultats

Dans cette section, je présente différents résultats qui montrent en particulier la difficulté de chauffer un satellite tel que Miranda. Au départ, de nombreuses évolutions dynamiques ont été étudiées seules afin de sélectionner un/plusieurs cas test(s) intéressant(s) de par leur(s) variation(s) en inclinaison et/ou en excentricité. Nous avons cependant privilégié une résonance en excentricité du fait de la dépendance au carré présente dans (5.22). Faire tourner le module dynamique<sup>9</sup> séparément permet également de pouvoir comparer les apports à cette dynamique lorsqu'il est couplé au module thermique.

D'un point de vue dynamique, il s'agit de sélectionner une résonance en excentricité permettant d'augmenter les excentricités suffisamment pour le chauffage. Dans le cas de la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel, on dispose des résonances  $e'^2$ ,  $ee'$  et  $e^2$  (1.1). Le premier cas est négligé dans cette étude car une capture dans cette résonance augmente l'excentricité d'Umbriel, et uniquement celle-ci. Or, dans notre cas, c'est surtout le chauffage du satellite Miranda que nous souhaitons étudier. Dans les deux cas suivants, on obtient une augmentation significative de l'excentricité de Miranda. La capture dans la résonance dépend des conditions initiales sur les excentricités. Dans le cas de  $e' = 0.002$  et  $e < 0.006$ , Malhotra et Dermott [1990] ont montré une capture certaine dans la résonance  $ee'$ , et dans la résonance  $e^2$  si  $e' > 0.002$ .

Le principe d'évolution est le même que dans le cas de la capture en inclinaison, étudiée au chapitre précédent : une capture dans la résonance primaire faisant augmenter l'excentricité, suivie par des traversées/captures dans des résonances secondaires impliquant la sortie de la résonance primaire (cf. Chapitre 4).

Puisqu'aucune trace d'activité géologique n'a été détectée pour Umbriel [Smith *et al.*, 1986], nous ne considérons pas une augmentation en excentricité pour Umbriel et sélectionnons une trajectoire capturée dans une résonance  $e^2$ . Nous supposons également que l'inclinaison de Miranda est déjà à  $4.5^\circ$  suite à une capture et une sortie de la résonance en  $I^2$ . Les résultats se subdivisent en deux cas avec différents modèles rhéologiques.

#### Profils initiaux

Le modèle de départ considère un satellite (Miranda ou Umbriel) dont le rayon est discrétisé en  $N_i = 100$  points. La résolution de l'équation de la chaleur est effectuée dans chacune des couches  $i$  prédéfinies et fournit une température  $T_i$  dans chaque couche. Cette température permet de calculer une viscosité (5.26) et un rapport  $(k_2/Q)_{s_i}$  par les expressions (2.7) et (5.27) et selon le modèle rhéologique choisi. Le rapport  $(k_2/Q)_s$  renvoyé au module dynamique

---

9. Dans ce cas, la fonction de dissipation  $Q$  est supposée constante.

est une moyenne arithmétique des  $(k_2/Q)_{s_i}$  prédéterminés.

Concernant le chauffage par les éléments radiogéniques, celui-ci est très faible car il ne considère pas les éléments radioactifs de courtes durées de vie<sup>10</sup> et est de l'ordre de  $10^{-14}$  W/kg.

La condition initiale est définie selon (5.8) où  $f(r)$  est un profil de température défini par la désintégration des éléments radiogéniques sur 4.6 milliards d'années. La température de surface est fixée à une température d'équilibre constante de 80.5 K pour Miranda. Pour comparaison, Castillo-Rogez *et al.* [2007] obtiennent une valeur de la température d'équilibre de 90 K pour Japet. Les profils thermiques sont déterminés par la résolution de l'équation de la chaleur avec les conditions frontières précédemment définies. Comme terme de source, on considère l'effet du chauffage radiogénique depuis la formation des satellites il y a 4.6 milliards d'années. Dans ce cas, nous tenons compte des éléments radioactifs de courte demi-vie qui sont listés dans la table 5.2 car ils sont actifs dans les premiers stades de l'évolution des satellites. On sélectionne ensuite les profils minimaux et maximaux obtenus par la simulation.

Dans les cas de Miranda et Umbriel, les profils minimaux et maximaux obtenus de cette manière sont représentés à la figure 5.6.

Les scénarios présentés dans les sections suivantes considèrent le profil maximal de température comme profil initial de température.

### Scénario nominal

Le scénario nominal présenté ici est une première approche couplée de notre problème et considère des paramètres thermiques et des variables orbitales réalistes. Considérons les satellites Miranda et Umbriel dont les variables orbitales sont fixées aux valeurs actuelles (cf. Table B.3) excepté pour le rapport des demi-grands axes, fixé à la résonance en excentricité  $e^2$  et les excentricités fixées à des valeurs plus petites. L'évolution dynamique à l'intérieur de la résonance est dirigée par les équations de marée (2.8) avec le paramètre  $(k_2/Q)_p = 5.2 \cdot 10^{-5}$  pour Uranus [Tittlemore et Wisdom, 1988]. Pour les satellites, ce rapport de marée est directement déterminé par le code thermique.

---

10. On suppose que la rencontre de la résonance 3 :1 entre Miranda et Umbriel n'a pas lieu au début de la formation du système solaire.

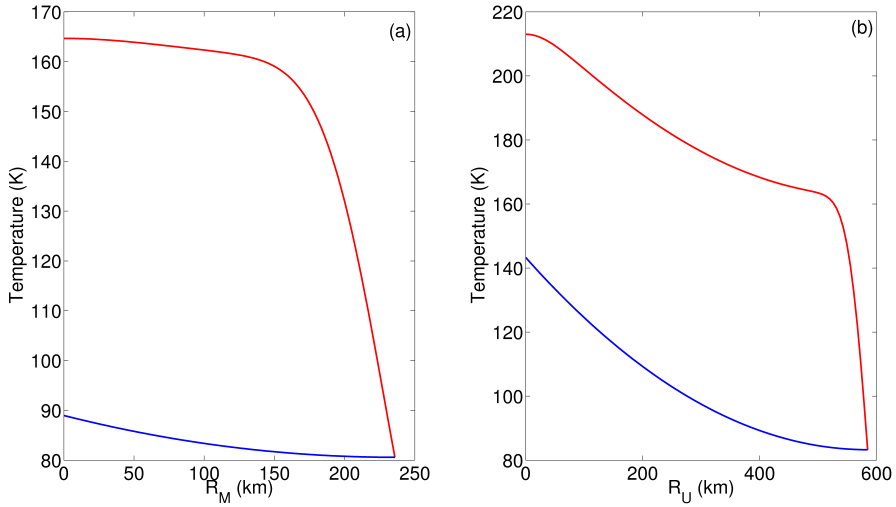


FIGURE 5.6 – Profils maximaux (rouge) et minimaux (bleu) de température des deux satellites Miranda (a) et Umbriel (b), obtenus par la résolution de l'EDP de la chaleur considérant une source de chaleur radiogénique sur la durée de vie des satellites ( $4.6 \cdot 10^9$  années).

Les paramètres thermiques sont fixés tels qu'expliqué dans la section concernant le module thermique (5.1) i.e. comme des combinaisons de ces paramètres définis pour la glace et pour les silicates. La fraction de masse et de volume de silicates de chacun des satellites est obtenue via les équations (5.24) et (5.25). La fonction de dissipation  $Q$  est calculée selon le modèle de Maxwell.

Le résultat de cette première approche couplée est donné à la figure 5.7. L'effet de marée sur les demi-grands axes pousse les satellites à l'intérieur de la zone de résonance et les fait évoluer sur une échelle de temps de  $8 \cdot 10^6$  années. À l'intérieur de cette résonance  $e^2$ , on observe (a) la libration de l'argument résonant  $\theta_6$  (1.1), impliquant l'augmentation de l'excentricité de Miranda (b). La valeur de l'excentricité à la sortie de la résonance est :

$$e \approx 0.02 . \quad (5.30)$$

Cette valeur est assez modérée et, par l'amortissement des excentricités dû aux marées, on n'observe aucun chauffage sur Miranda avec notre choix de conditions initiales. Avec une rhéologie de Maxwell, la viscosité de Miranda est très élevée ( $\approx 10^{19}$  Pa s) impliquant un temps caractéristique de Maxwell très élevé par rapport aux périodes orbitales et menant à une réponse élastique du satellite. L'augmentation en excentricité n'est pas suffisante pour dominer le chauffage radiogénique dans l'équation la chaleur (5.19).



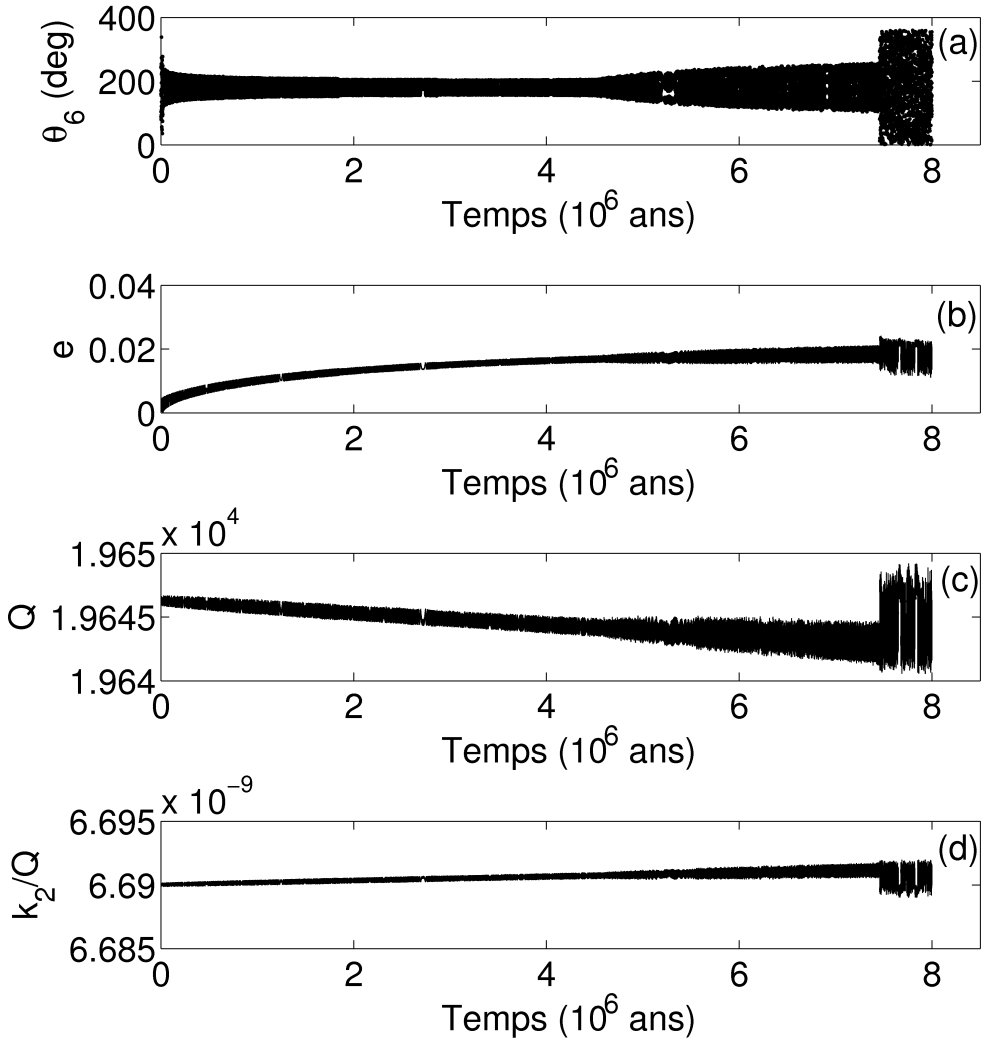


FIGURE 5.7 – Résultats d’une approche couplée avec la rhéologie de Maxwell. Pendant la libration de l’argument résonant (a), l’excentricité associée augmente (b). Sa valeur finale à la sortie de la résonance n’est pas maintenue suffisamment longtemps et est insuffisante pour impliquer une augmentation de température à l’intérieur de Miranda. En conséquence, la valeur de  $Q$  est assez haute avec comme résultat un rapport  $(k_2/Q)_s$  très petit pour le satellite, associé à une dissipation nulle à l’intérieur de Miranda.

En conséquence, la valeur de  $Q$  est assez haute avec comme résultat un rapport  $(k_2/Q)_s$  très petit pour le satellite (cf. Figures 5.7 (c) et (d)), associé à une dissipation nulle à l'intérieur de Miranda. Par les équations de Kaula (2.8), on constate que, dans le cas présenté ici, le second terme de ces équations est insignifiant et l'évolution de marées est dominée par la dissipation à l'intérieur de la planète : Miranda s'éloigne de la planète et son orbite est circularisée. Ce scénario est résumé dans la partie gauche du schéma 5.8.

Un scénario alternatif pour renforcer le chauffage par marée de Miranda serait de considérer un autre modèle rhéologique mais, malgré l'obtention de valeurs plus petites pour la fonction de dissipation  $Q$  avec ces modèles, la viscosité de Miranda reste néanmoins élevée pour fournir un chauffage significatif par marée.

On peut diminuer cette viscosité en considérant une valeur de température du point de fusion plus basse que 273 K. Une température de fusion de 200 K est possible pour Miranda, et en particulier si l'intérieur du satellite dispose des clathrates et des éléments tels que l'ammoniac ou des sels [Greenberg *et al.*, 1991]. Plusieurs tests ont été réalisés avec différentes températures de fusion et avec les trois modèles rhéologiques mais aucun d'entre eux n'a donné un résultat de chauffage sur Miranda, menant à la conclusion d'un chauffage par marée inefficace sur Miranda avec une approche classique et les paramètres choisis.

Cette hypothèse est confirmée de la manière suivante : soit l'équation (5.22) avec  $O = 0$  où on pose :

$$C = \frac{21}{2} k_2 \frac{G m_0^2 n R_s^5}{a^6},$$

où  $C$  est une constante. L'énergie par unité de masse évaluée en  $e$  et  $Q$  est donnée par :

$$E = \frac{C}{m} \frac{e^2}{Q}, \quad (5.31)$$

où  $m$  est la masse de Miranda. L'énergie totale est représentée à la figure 5.9 (a). Considérant une forte dissipation ( $Q = 5$ ), on note une valeur proche de 1 GW pour  $e \approx 0.06$ . En divisant l'énergie (5.31) par la chaleur spécifique de Miranda, on obtient la variation de la température interne (K) par année. La figure 5.9 (b) donne cette variation sur un million d'années dans un plan excentricité  $e$  versus fonction de dissipation  $Q$ , l'échelle de couleur étant logarithmique.

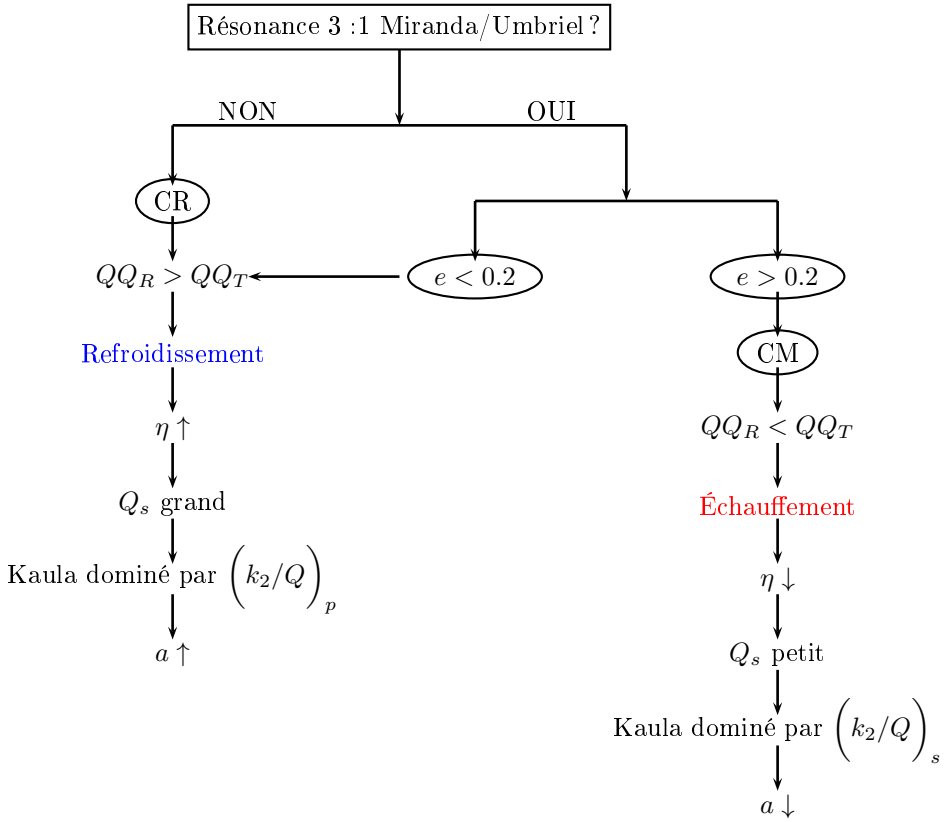


FIGURE 5.8 – Résumé des tests. CR= Chauffage radiogénique, CM=Chauffage marée,  $QQ_R$ =flux de chaleur radiogénique (W/kg),  $QQ_T$ =flux de chaleur marée (W/kg)

L'approximation présentée à la figure 5.9 (b) confirme l'impossibilité de chauffage de Miranda dans les conditions choisies au premier test : en effet, avec des excentricités inférieures à 0.05, l'augmentation de température sur un million d'années est inférieure à 1 K pour des valeurs en-dessous de 100 pour la fonction de dissipation  $Q$ . Pour observer une légère augmentation de température, il est nécessaire de considérer une excentricité plus haute, proche de 0.4, et de la maintenir sur une période de quelques millions d'années.

De petites valeurs pour la fonction de dissipation  $Q$  sont requises également, invalidant l'utilisation du modèle de Maxwell dans nos conditions (cf. Figure 5.3).

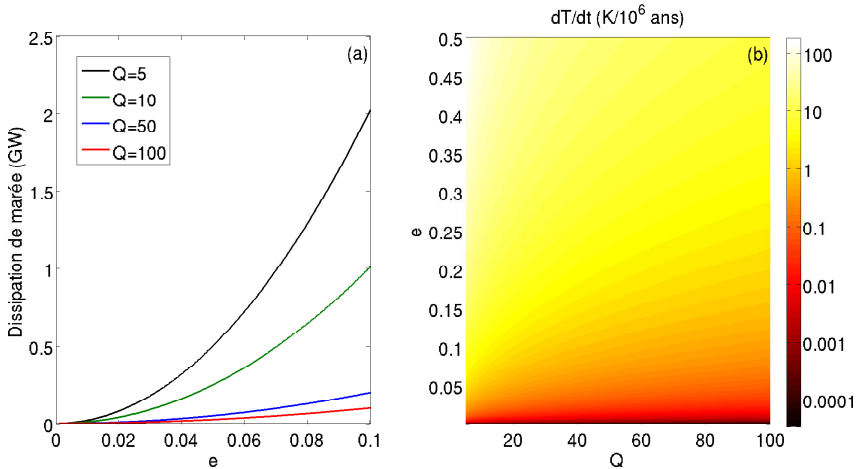


FIGURE 5.9 – Variation de l'énergie de dissipation de marée (GW) versus l'excentricité pour des valeurs fixées de  $Q$  (a). Variation de la température (K) par million d'années dans un plan excentricité versus fonction de dissipation  $Q$  (b). L'échelle de couleurs est logarithmique.

### Scénario extrême

Le scénario extrême présenté dans cette section considère les rhéologies de Burgers et d'Andrade. J'ai choisi de préserver la signification physique des paramètres thermiques au détriment d'éléments orbitaux plausibles en vue d'obtenir un chauffage de l'intérieur du satellite correspondant à l'approximation donnée dans la figure 5.9 (b).

L'excentricité de Miranda n'augmentant pas suffisamment avec la capture et l'évolution dans la résonance primaire  $e^2$ , on considère une haute excentricité initiale ( $e = 0.5$ ) au départ de la simulation dans le but de montrer l'effet de l'approche couplée. Dans ce cas, comme expliqué par Champenois [1998], l'excentricité décroît jusqu'à une valeur d'équilibre et jusqu'à la sortie de la résonance. À noter qu'une telle excentricité implique que le scénario présenté est totalement fictif.

La figure 5.10 présente les résultats obtenus avec la rhéologie de Burgers avec  $C = 50$  (lignes pleines) et celle d'Andrade avec  $\alpha = 0.33$  (lignes pointillées). Dans les deux cas, la valeur de la température de fusion est fixée à 200 K pour diminuer la viscosité de Miranda et tenter d'obtenir une réponse visqueuse du corps. Les deux modèles rhéologiques différents mènent à une évolution orbitale uniforme : on observe la sortie de la résonance illustrée par la fin du régime de libration de l'argument résonant  $\theta_6$  (a). L'excentricité élevée dé-

croît jusqu'à une valeur d'équilibre proche de 0.38 (b). L'évolution thermique associée diffère du cas nominal puisque nous observons ici une forte dissipation pour Miranda : la valeur de  $Q$  est assez petite et le rapport  $(k_2/Q)_s$  est du même ordre que le rapport  $(k_2/Q)_p$ . Associés à une grande excentricité, l'évolution de marées diffère du cas nominal par une prédominance du second terme dans l'équation (2.8) : l'évolution est maintenant dominée par la dissipation intérieure du satellite. Ceci implique un rapprochement du satellite et de la planète au lieu de l'éloignement classique et Miranda revient vers la zone de résonance. Ce scénario est présenté dans la partie droite du schéma 5.8.

La partie thermique dépend du modèle choisi. À la figure 5.10 (c) on observe, en lignes pleines, une légère augmentation de la température moyenne avec le modèle de Burgers. Cette augmentation d'approximativement 1 K sur un million d'années correspond à l'augmentation obtenue par l'approximation donnée à la figure 5.9 (b). La valeur de la fonction de dissipation  $Q$  est, dans les deux cas, assez petite (d), impliquant une valeur raisonnable pour le rapport  $(k_2/Q)_s$  de Miranda (e). Cependant, la valeur de l'excentricité étant amortie sur une échelle de temps assez courte (l'amortissement des excentricités par l'effet de marée empêche le maintien d'une valeur élevée), on observe néanmoins une augmentation dans la dissipation ayant pour conséquence un refroidissement du satellite même dans le cas d'une approche extrême.

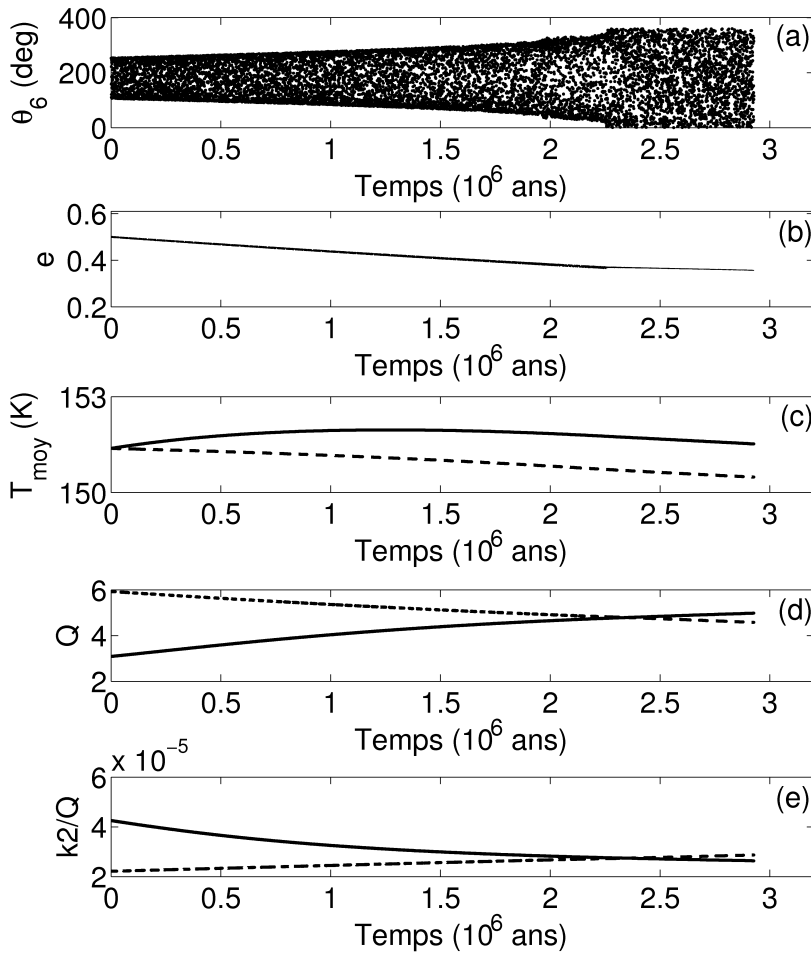


FIGURE 5.10 – Résultats de l'approche couplée avec un modèle de Burgers (lignes pleines) et un modèle d'Andrade (lignes pointillées). Pendant la libration de l'argument résonant (a), l'excentricité associée décroît (b) jusqu'à une valeur d'équilibre. Dans les deux cas, la valeur de  $Q$  est assez petite (d) avec une valeur raisonnable pour le rapport  $(k_2/Q)_s$  (e), associée à une grande dissipation à l'intérieur de Miranda. L'excentricité initiale élevée, combinée à une température de fusion de 200 K, implique une légère augmentation de température avec le modèle de Burgers (c).

## 5.4 Conclusions et perspectives

Ce chapitre présente un modèle couplé d'évolution thermique et dynamique basé sur une résonance en moyen mouvement 3 : 1 entre Miranda et Umbriel. L'objectif est d'expliquer les structures observées en surface de Miranda par un chauffage interne du satellite provoqué par une augmentation de la dissipation d'énergie de marée. Un scénario de collisions avec un impacteur proposant une dislocation suivi d'un ré-assemblage du satellite pourrait également expliquer les structures principales observées mais pas la présence des couronnes lisses à la surface de Miranda [Plescia, 1988]. Nous nous sommes dès lors focalisés sur un scénario dissipatif de marées.

Le module thermique présente la résolution de l'équation de la chaleur pour une sphère isotrope composée d'un mélange homogène de silicates et de glaces. Les différents paramètres thermiques ont été détaillés et on considère une viscosité dépendante de la température ainsi que différents modèles rhéologiques. Le mode principal de transfert de chaleur est la conduction puisqu'aucune de nos simulations n'a mené à un chauffage suffisant pour démarrer une convection. La température à l'intérieur du satellite augmente à cause de la désintégration des éléments radiogéniques ou de la dissipation de marée dépendante de la variation des éléments orbitaux.

Le module dynamique consiste en une moyennisation des éléments à courte période du problème des 3 corps complet présenté au chapitre 2. Cette approche permet d'obtenir un modèle à 3 dimensions contenant les excentricités et les inclinaisons des orbites. Ce module est couplé à la partie thermique par les effets de marée.

Une approche couplée des deux évolutions n'a jamais été appliquée dans le cas des satellites principaux d'Uranus. Les solutions dépendent essentiellement du modèle rhéologique choisi et des excentricités des satellites. À la vue des valeurs importantes de la fonction de dissipation  $Q$ , on note cependant l'inefficacité du modèle de Maxwell dans le cas d'une approche conductrice et ce, quelles que soient les excentricités obtenues. Les deux autres modèles (Burgers et Andrade) donnent des valeurs de  $Q$  proches de 100 pour Miranda. Cependant, la valeur d'excentricité finale  $e \approx 0.02$ , obtenue par la capture dans la résonance 3 : 1 avec Umbriel, n'est pas maintenue du fait de l'amortissement impliqué par les marées agissant sur une échelle de temps courte, et Miranda se refroidit.

Un scénario alternatif est étudié avec une excentricité initiale plus élevée menant à un léger chauffage de Miranda sur un million d'années. L'évolution orbitale dans ce cas extrême résulte en une diminution de l'excentricité jusqu'à une valeur d'équilibre associée à une diminution de l'énergie de dissipation de marée. Une fois cette valeur atteinte, Miranda se refroidit à nouveau.

Ces résultats de refroidissement de Miranda ne dépendent pas exclusivement des excentricités et des modèles rhéologiques mais sont aussi associés à notre choix de modèle de sphère homogène conductrice, initialisée à une température assez basse. L'idée de chauffage par marée de Miranda ne doit donc pas être abandonnée.

En effet, par comparaison, les deux satellites de Saturne, Encelade et Mimas, ont beaucoup de similitudes avec les satellites principaux d'Uranus, et en particulier avec Miranda. Mimas, malgré sa grande excentricité et sa distance proche de Saturne, ne présente aucun signe d'activité géologique passée ou actuelle alors qu'Encelade est géologiquement très actif pour le moment. Or un modèle thermique tel que celui présenté ici et appliqué au satellite Encelade aurait mené aux mêmes résultats de refroidissement que pour Miranda.

Il existe cependant des preuves de chauffage sur Encelade : en particulier, les résultats de spectrométrie infrarouge de Cassini sur le terrain polaire sud d'Encelade, marqué de fissures linéaires, indiquent que la puissance dégagée est approximativement de 15.8 GW [Howett *et al.*, 2011] ou de 4.7 GW [Spencer *et al.*, 2013] selon la méthode utilisée. Des jets riches en eau évacués de la région polaire sud du satellite et associés à un chauffage interne important rendent très probable la présence d'eau liquide sous la surface d'Encelade.

Cette présence d'un océan entre la couche de glace extérieure et l'intérieur rocheux du satellite pourrait augmenter l'efficacité du chauffage par marée en amenant des distorsions plus importantes dans la couche de glace. La différence entre l'histoire géologique récente de Mimas, Miranda et Encelade tient dans les propriétés dépendantes de la température de leurs composants telles que la viscosité  $\eta$  et la fonction de dissipation  $Q$ . Une augmentation de températures internes due par exemple au chauffage radiogénique ou à des événements catastrophiques, peut renforcer le chauffage par marée puisque la viscosité et la fonction de dissipation diminuent exponentiellement avec les augmentations en température.

Bien qu'Encelade soit plus éloigné que Mimas par rapport à Saturne et dispose d'une excentricité plus basse, son état thermique, actuellement à haute énergie, est probablement lié à son évolution thermique. Le chauffage interne élevé est généralement attribué au chauffage par marée renforcé par les résonances orbitales. Le chauffage d'Encelade dans une configuration énergétique à l'équilibre et en résonance avec d'autres satellites de Saturne est étudié par Meyer et Wisdom [2007]. Ils ont montré qu'un chauffage par marée dans une telle configuration ne peut pas expliquer la chaleur provenant d'Encelade, à moins de considérer une haute dissipation pour Saturne [Lainey *et al.*, 2012]. Le chauffage par marée dans des résonances passées ne peut probablement pas expliquer entièrement des événements de resurfacing passés. La source et le



mécanisme de production de chaleur interne d'Encelade restant pour l'instant inexpliqués, ils fournissent cependant une analogie avec Miranda qui ouvre la porte vers de nouvelles perspectives à cette étude.

## CHAPITRE 6

---

### Conclusions et perspectives générales

---

Si la découverte du système uranien démarra au 18<sup>ième</sup> siècle pour être relancée en 1986 avec son survol par la navette spatiale *Voyager 2*, le voyage n'en est pas pour autant terminé. En effet, nombreuses restent les interrogations et les zones d'ombres à élucider. Le renouvellement de l'engouement scientifique pour Uranus et ses satellites est de bonne augure quant à la mise en lumière de ce système encore trop peu connu.

Par découverte du système, j'entends surtout compréhension de son histoire et de son évolution dynamique passée pour expliciter son présent et tenter de déduire son avenir. Une compréhension globale d'un système permet également parfois de translater la connaissance d'éléments du système étudié à des pairs semblables mais inexplorés (e.g. systèmes extrasolaires). C'est dans la compréhension du passé dynamique du système, jalonné notamment par des phénomènes de résonances orbitales, que s'est orientée cette thèse.

Tout au long du travail, nous avons retrouvé la résonance en moyen mouvement 3 : 1 qui semble s'inscrire comme une des clés du passé dynamique du système uranien. En abordant le système intérieur en premier lieu, j'ai commencé par la modélisation d'un problème restreint avec peu de données et d'informations à disposition. Ce manque de renseignements et surtout l'imprécision concernant les masses et les observations des petits satellites constituent sans aucun doute une limite à l'étude. Cependant, la mise en place d'un modèle analytique approché permet de déterminer certaines caractéristiques inhérentes au système malgré les approximations considérées et de proposer un schéma d'évolution future de ce système en transition.

Le chapitre consacré à la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel fournit une explication à la haute inclinaison de Miranda observée actuellement. Il reprend l'état de l'art de ce sujet et étend les résultats par des outils numériques plus puissants. Une nouvelle approche des résonances secondaires est avancée par la détermination définitive des combinaisons d'arguments en libration impliquées. J'y détermine dès lors un scénario d'évolution dans la résonance sensiblement différent mais cohérent avec les études passées, fournissant toujours le résultat de sortie à l'inclinaison désirée pour Miranda.

La perspective majeure de ce chapitre dynamique résidait en un couplage avec des aspects plus physiques du problème. Il est intéressant d'envisager le passé dynamique sous divers aspects et formant un tout afin de proposer un modèle plus proche de la réalité. L'évolution thermique ajoutée au dernier chapitre remplit dès lors cette fonction et donne une dimension plus interdisciplinaire à ce travail. J'y aborde les premiers éléments nécessaires à l'instauration d'une approche de dynamique interne pour Miranda et Umbriel en considérant un transfert de chaleur par conduction dans une sphère homogène. La simplicité de ce modèle thermique ne facilite cependant pas le maniement du problème couplé puisque la principale difficulté réside selon moi dans le couplage des deux approches et dans la manipulation des paramètres sous-jacents. Les résultats obtenus n'expliquent pas l'activité endogénique dont les signes sont visibles actuellement à la surface de Miranda. Cependant le scénario d'un chauffage par marées ne doit pas être abandonné car certaines structures observées ne peuvent pas être uniquement expliquées par un scénario de collision. La présentation de nouveaux résultats de chauffage avéré dans le cadre des satellites de Saturne, et plus particulièrement avec le satellite Encelade, ouvre les portes quant à de nouveaux résultats thermiques pour une meilleure compréhension de l'histoire dynamique de Miranda, ainsi que des autres satellites principaux d'Uranus.

# Annexes



# ANNEXE A

## Notations

Je reprends dans cette annexe les notations et unités principales utilisées dans le texte. Rappelons que dans le cas d'un problème à 3 corps, les variables primées dans le texte correspondent au satellite le plus extérieur. Les variables indicées sont utilisées pour les problèmes à N corps, l'indice étant attribué dans un ordre chronologique par rapport au corps central.

TABLE A.1

Symbole	Signification	Référence
$a$	Demi-grand axe	Annexe C
$\alpha = a/a'$	Rapport des demi-grands axes	Figure 1.3
$b_i^{(j)}$	Coefficient de Laplace	(4.10)
$e$	Excentricité	Annexe C
$\epsilon$	Obliquité	(5.22)
$G$	Constante de gravitation	(2.1)
$G = L\sqrt{1 - e^2}$	Moment de Delaunay	(3.5)
$g = \omega$	Angle de Delaunay	(3.5)
$\gamma = \sin \frac{I}{2}$		(4.11)
$H = G \cos I$	Moment de Delaunay	(3.5)
$h = \Omega$	Angle de Delaunay	(3.5)
$\mathcal{H}$	Hamiltonien	(3.1)
$\mathcal{H}_0$	Hamiltonien résonant	(3.29) et (3.42)
$\theta_i$	Argument résonant	(1.1)
$\theta_M, \theta_U$	Angles de Miranda et Umbriel	(4.17) et (4.18)

$I$	Inclinaison	Annexe C
$J_2/J_4$	Harmoniques zonales d'ordre 2 et 4	(2.10)
$J_M, J_U$	Moments de Miranda et Umbriel	(4.19) et (4.20)
$k_2$	Nombre de Love d'ordre 2	(2.7)
$L = \sqrt{\mu a}$	Moment de Delaunay	(3.5)
$l = M$	Angle de Delaunay	(3.5)
$\lambda = l + g + h$	Angle de Delaunay modifié	(3.10)
$M$	Anomalie moyenne	Annexe C
$m_0/m_i$	Masse du corps central/du satellite	(2.1)
$\mu = Gm_0$		(3.4)
$n$	Moyen mouvement	Annexe C
$\mathbf{p}, \mathbf{P}$	Vecteurs de moments	(3.1) et (3.2)
$P = L - G$	Moment de Delaunay modifié	(3.10)
$p = -g - h$	Angle de Delaunay modifié	(3.10)
$Q$	Fonction de dissipation	(2.6)
$Q = G - H$	Moment de Delaunay modifié	(3.10)
$\mathbf{q}, \mathbf{Q}$	Vecteurs de coordonnées	(3.1) et (3.2)
$q = -h$	Angle de Delaunay modifié	(3.10)
$R_p/R_s$	Rayon moyen de la planète/du satellite	(2.8)
$\mathbf{r}$	Vecteur position	(2.1)
$\rho$	Densité	(2.7)
$\tau$	Échelle de temps caractéristique	(4.24)
$\mathbf{v}$	Vecteur vitesse	(2.1)
$\omega$	Argument du péricentre	Annexe C
$\Omega$	Longitude du nœud ascendant	Annexe C
$\varpi = \omega + \Omega$	Longitude du péricentre	Annexe C
$(x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes	(2.1)
$Y(\gamma(t)) \bar{Y}(\gamma(t))$	MEGNO et sa moyenne	(4.1)

TABLE A.2 – Paramètres physiques

Symbole	Unité	Signification	Référence
$\alpha = k/(\rho C_p)$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	Diffusivité thermique	(5.2)
$C_p$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	Chaleur spécifique	(5.2)
$k$	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	Conductivité thermique	(5.2)
$H_{rad}$	$\text{W kg}^{-1}$	Taux de génération d'énergie	Table 5.2
$\mu$	Pa	Rigidité	(2.7)
$\eta$	Pa s	Viscosité	(5.26)
$\rho$	$\text{kg m}^{-3}$	Densité	(5.2)
$T$	K	Température	(5.1)
$T_m$	K	Température du point de fusion	(5.26)
$t_c$	s	Temps caractéristique de conduction	(5.1.1)
$\tau_M = \mu/\eta$	s	Temps caractéristique de Maxwell	(5.27)

## ANNEXE B

---

### Conditions initiales

---

L'annexe *Conditions initiales* résume les différentes conditions initiales utilisées dans les simulations numériques.

TABLE B.1 – Paramètres physiques et incertitudes correspondantes pour les cinq satellites principaux d'Uranus :  $GM$  est donné par Jacobson [2007] le rayon moyen des satellites  $R_s$  par Thomas [1988]. Pour les satellites intérieurs Cressida et Desdémone, les rayons sont donnés par Showalter et Lissauer [2006].

Satellites	$GM$ ( $\text{km}^3/\text{s}^2$ )	$R_s$ (km)
Miranda	$4.4 \pm 0.4$	$235.8 \pm 0.7$
Ariel	$86.4 \pm 5.0$	$578.9 \pm 0.6$
Umbriel	$81.5 \pm 5.0$	$584.7 \pm 2.8$
Titania	$228.2 \pm 5.0$	$788.9 \pm 1.8$
Obéron	$192.4 \pm 7.0$	$761.4 \pm 2.6$
Cressida	0.0229	$41 \pm 2$
Desdémone	0.0119	$35 \pm 4$



TABLE B.2 – Paramètres physiques et incertitudes correspondantes pour Uranus :  $GM$  est donné par Jacobson [2007]. Le paramètre  $R_p$  est le rayon moyen [Seidelmann *et al.*, 2007] de la planète. Les harmoniques sphériques  $J_2$  et  $J_4$  associées à l’aplatissement de la planète sont déterminées par Jacobson [2007].

	$GM$ ( $\text{km}^3/\text{s}^2$ )(km)	$R_p$	$J_2 \times 10^6$	$J_4 \times 10^6$
Uranus	$5\,793\,964 \pm 6$	26 200	$3\,341.29 \pm 0.72$	$-30.44 \pm 1.02$

TABLE B.3 – Éléments orbitaux des 5 satellites principaux d’Uranus à J1980 [Laskar et Jacobson, 1987] et des deux satellites intérieurs Cressida et Desdémone à J1986 [Jacobson, 1998]. Dans chacun des cas, les satellites sont donnés selon leur distance croissante par rapport à la planète :  $a$  est le demi-grand axe,  $e$  l’excentricité,  $\omega$  l’argument du péricentre,  $M$  l’anomalie moyenne,  $I$  l’inclinaison,  $\Omega$  la longitude du nœud ascendant,  $n$  le moyen mouvement. Les variables  $P$  et  $P_\Omega$  symbolisent les périodes orbitales et du nœud respectivement.

Satellites	$a$ (km)	$e$	$\omega$ (deg)	$M$ (deg)	$I$ (deg)	$\Omega$ (deg)	$n$ (deg/j)	$P$ (j)	$P_\Omega$ (an)
Miranda	129 900	0.0013	68.312	311.330	4.338	326.438	254.6906576	1.413	17.727
Ariel	190 900	0.0012	115.349	39.481	0.041	22.394	142.8356579	2.520	57.248
Umbriel	266 000	0.0039	84.709	12.469	0.128	33.485	86.8688879	4.144	126.951
Titania	436 300	0.0011	284.400	24.614	0.079	99.771	41.3514246	8.706	195.369
Obéron	583 500	0.0014	104.400	283.088	0.068	279.771	26.7394888	13.46	195.37
Cressida	61 800	0.0004	44.236	233.795	0.006	99.403	776.5824144	0.464	1.402
Desdémone	62 700	0.0001	183.285	184.627	0.113	306.089	760.0555393	0.474	1.474

---

## Éléments kepleriens

---

Dans un problème des 2 corps dit « keplerien », on connaît l'intérêt des éléments elliptiques pour décrire une orbite puisque 5 éléments sur 6 sont des constantes contrairement aux 6 coordonnées cartésiennes, qui sont toutes fonctions du temps. Les éléments kepleriens, appelés également *éléments orbitaux*, sont, de plus, adaptés au problème considéré. Les 5 éléments constants décrivent la géométrie des orbites et se regroupent de la manière suivante :

- Le demi-grand axe  $a$  et l'excentricité  $e$  définissent la taille et la forme de l'orbite dans le plan orbital.
- L'inclinaison  $I$  et la longitude du nœud ascendant  $\Omega$  orientent le plan orbital par rapport au plan de référence.
- L'argument du péricentre  $\omega$  donne l'orientation de l'orbite dans le plan orbital.

Notons que le mouvement sera dit prograde dans le cas où l'inclinaison se situe entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , et rétrograde pour une inclinaison comprise entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$ . Lorsque  $I$  est égale à  $0$  ou  $180^\circ$ , le nœud n'est pas défini,  $\Omega$  et  $\omega$  étant dès lors indéterminés. Pour contourner ce problème, on utilise fréquemment l'angle  $\varpi = \omega + \Omega$ , la longitude du péricentre qui est toujours définie.

La position d'un satellite sur une orbite autour d'Uranus est donnée par l'anomalie vraie  $f$ , qui est l'angle entre la direction du péricentre  $\omega$  et la position du satellite sur l'orbite. L'anomalie vraie est liée à l'anomalie excentrique  $E$  par la relation :

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} ,$$

elle-même liée à l'anomalie moyenne par l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E .$$

La somme de la longitude du péricentre  $\varpi$  et de l'anomalie moyenne donne la longitude moyenne  $\lambda$ .

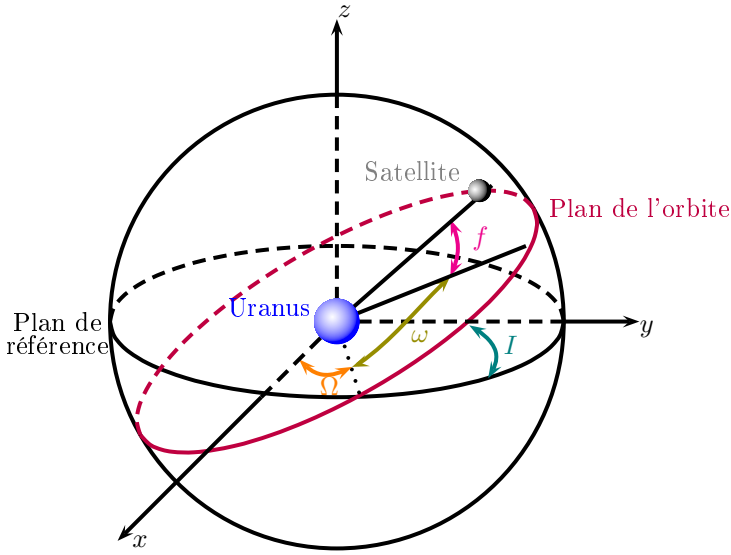


FIGURE C.1 – Les éléments kepleriens. Repérage d'un satellite par rapport à Uranus.

Les éléments elliptiques, bien qu'utiles pour la représentation du corps sur son orbite, souffrent de quelques indéterminations pouvant mener à des difficultés dans le traitement de cas avec petites inclinaisons et/ou excentricités. Il a donc été également introduit dans ce travail les variables suivantes :

$$\begin{aligned} k &= e \cos \varpi & h &= e \sin \varpi \\ q &= \gamma \cos \Omega & p &= \gamma \sin \Omega , \end{aligned}$$

avec  $\gamma = \sin \frac{I}{2}$ . Les éléments orbitaux seront utilisés au travers de la thèse pour représenter la dynamique des satellites. Les intégrations numériques utilisent les éléments cartésiens.

---

## Éphémérides de Cressida

---

Les éphémérides officielles des satellites intérieurs sont construites à l'aide d'une ellipse précessante ajustée aux observations astrométriques du télescope spatial *Hubble* et les données d'imagerie obtenues par *Voyager 2*. Les éléments des 10 lunes découvertes par *Voyager 2* ont été fournies par Jacobson [1998] tandis que le modèle lié aux trois lunes découvertes par la suite est attribué à Showalter et Lissauer [2006]. La grande inconnue pour l'obtention d'éphémérides plus précises est la détermination des masses des corps de ce système découlant d'observations détaillées complémentaires.

Pour illustrer la précision des éphémérides des satellites intérieurs, le résultat annexe présente les éphémérides de Cressida en parallèle avec le résultat obtenu via le code d'intégration numérique d'un problème des 3 corps présenté au chapitre 2. Dans ce code, on considère Miranda et Cressida, et la perturbation du  $J_2$  de la planète sur les satellites.

Les mouvements représentés dans les figures D.1 et D.2 sont similaires. On conclut que les éphémérides de Cressida sont données par une orbite précessante due à l'aplatissement du corps central et perturbé par le satellite principal Miranda. Ces conclusions ont été vérifiées auprès de l'auteur des éphémérides, Jacobson, R. La figure D.3 est obtenue par intégration d'un problème des 4 corps composé d'Uranus, de Cressida, Desdémona et Miranda. La perturbation due au  $J_2$  de la planète est également considérée. On constate que l'ajout d'un seul satellite intérieur dans le modèle perturbe fortement le mouvement présenté par les éphémérides, illustrant ainsi le travail restant à accomplir pour fournir des éphémérides valables pour le système intérieur.

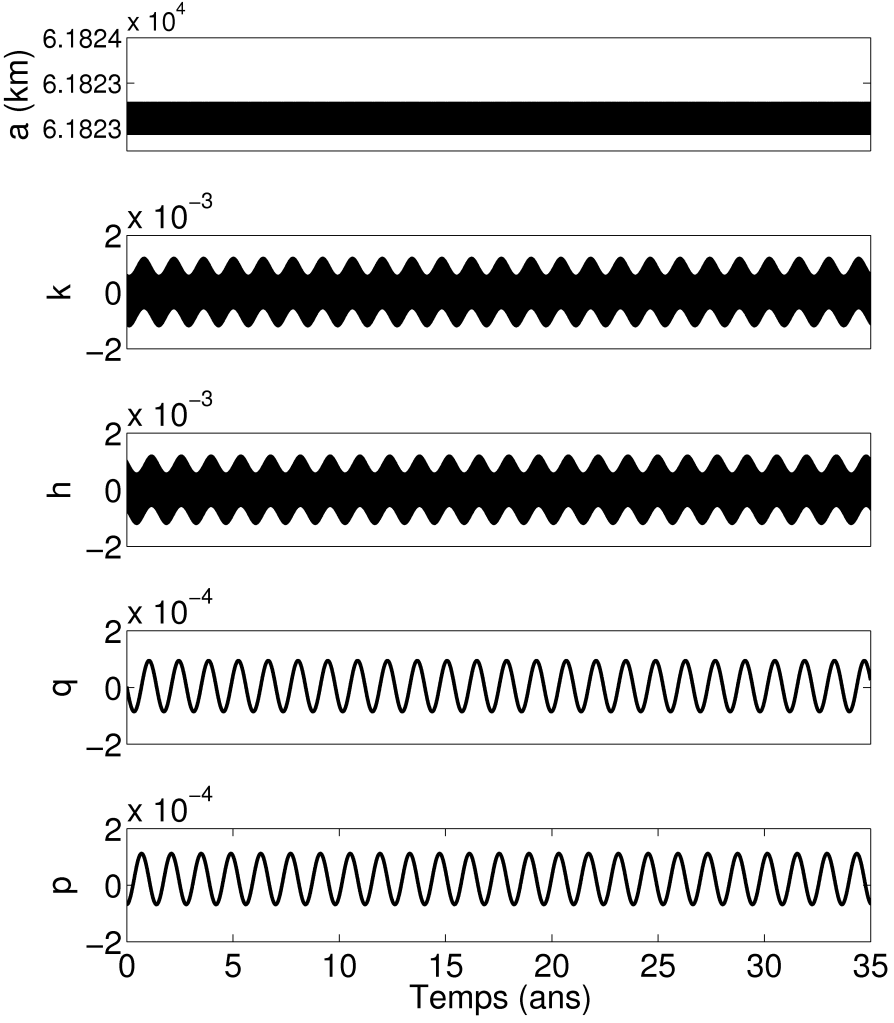


FIGURE D.1 – Éphémérides de Cressida qui donnent respectivement l'évolution du demi-grand axe  $a$  et des éléments  $k, h, q, p$  de Cressida au cours du temps en années. L'évolution est représentée sur un intervalle de temps de 35 ans.

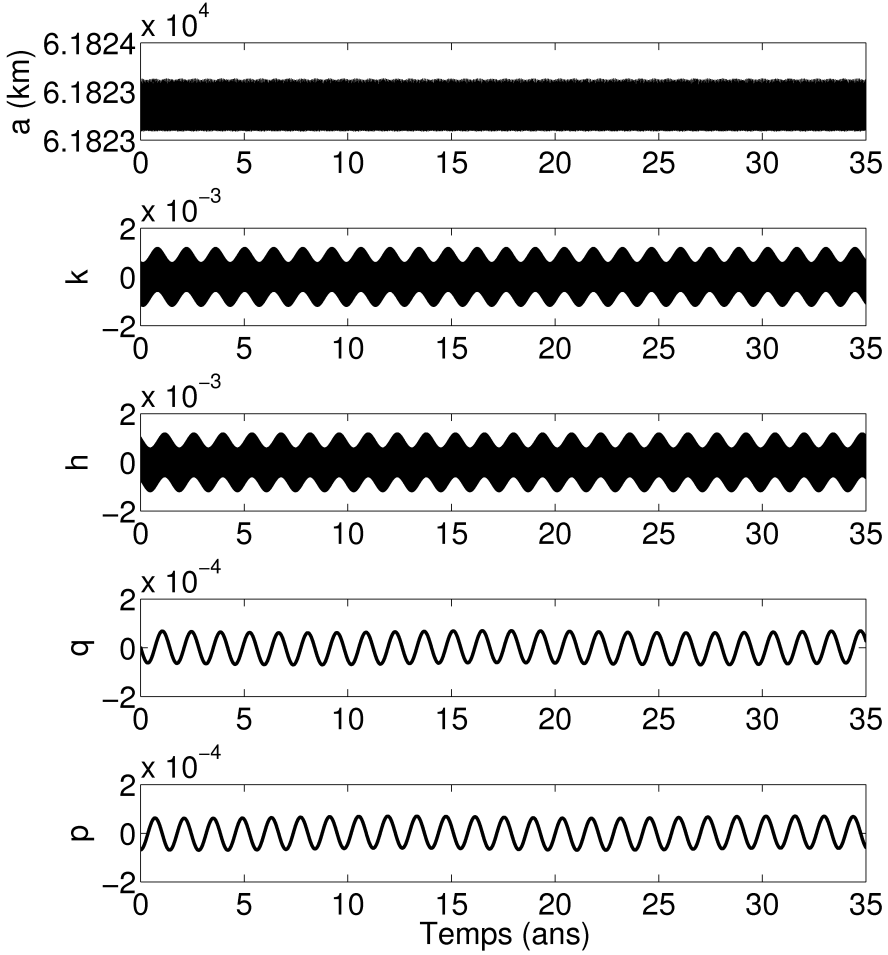


FIGURE D.2 – Éléments de Cressida résultant de l'intégration numérique d'un problème des 3 corps composé d'Uranus, Cressida et Miranda avec la perturbation due à l'aplatissement d'Uranus. Comme dans la figure D.1, l'évolution du demi-grand axe  $a$  et des éléments  $k, h, q, p$  de Cressida est représentée au cours du temps en années.

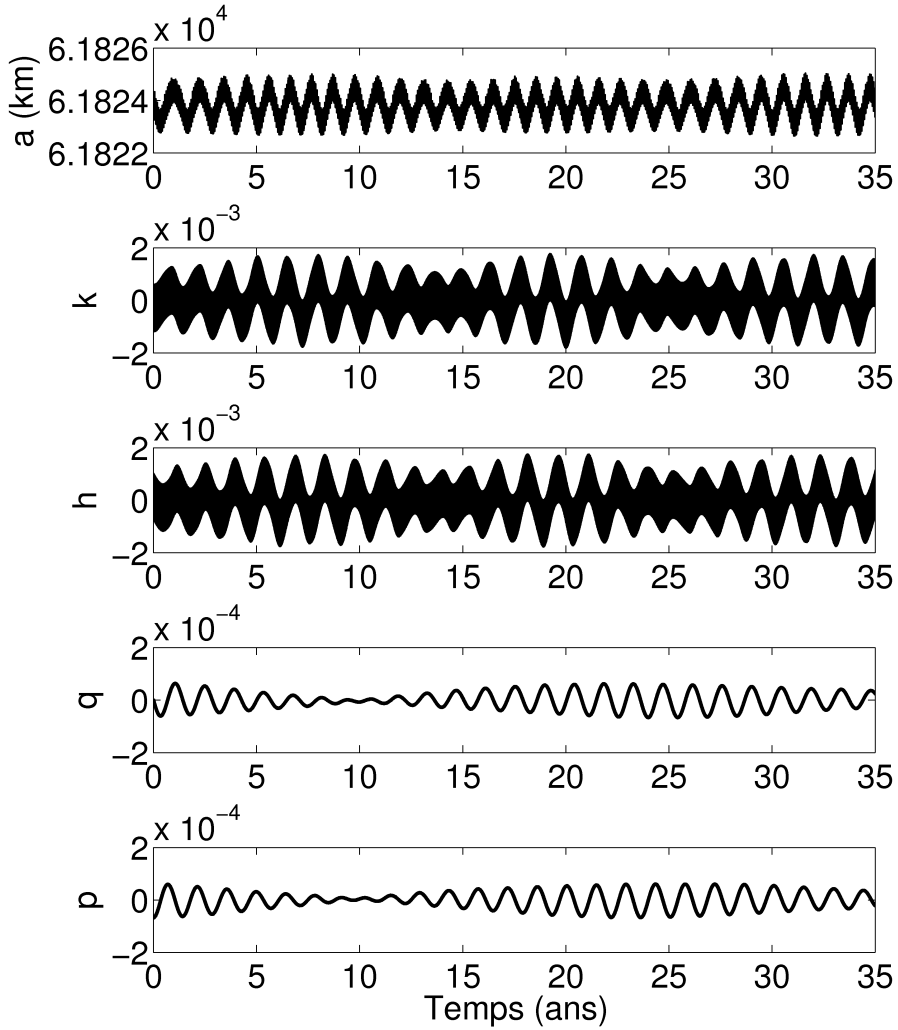


FIGURE D.3 – Éléments de Cressida résultant de l'intégration numérique d'un problème des 4 corps composé d'Uranus, Cressida, Desdémone et Miranda avec la perturbation due à l'aplatissement d'Uranus. Comme dans la figure D.1, l'évolution du demi-grand axe  $a$  et des éléments  $k, h, q, p$  de Cressida est représentée au cours du temps en années.

---

## Validation MEGNO

---

Le détecteur de chaos **Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits** (MEGNO) est utilisé au chapitre 4 pour représenter l'espace de phase du système lors de la capture dans la résonance 3 : 1. Il a été testé sur différents problèmes, repris dans cette annexe afin de ne pas alourdir le corps principal du texte.

### E.1 Validation sur un système à 3 planètes

Une première étape de validation du détecteur de chaos MEGNO est d'abord effectuée par comparaison avec un résultat présenté dans Goździewski *et al.* [2001]. Soit un problème héliocentrique à  $N$  corps décrit dans la sous-section 2.2.6 avec  $N = 4$ , sans effet d'aplatissement ( $J_2 = 0$ ) représentant le problème Soleil, Terre, Jupiter, Saturne dont les conditions initiales sont tirées de Goździewski *et al.* [2001]. Cet exemple est pertinent dans le cadre de ce travail car il utilise le code à  $N$  corps développé au chapitre 2, l'intégration des équations du mouvement ayant déjà été validée par comparaison avec les résultats du logiciel SWIFT. On suppose donc que les orbites obtenues par intégration de ces équations du mouvement sont valides.

Pour l'indicateur de chaos MEGNO, le vecteur de déviation initial a été choisi aléatoirement et la valeur du MEGNO moyen  $\bar{Y}$  est obtenue via l'intégration des équations variationnelles associées et l'intégration de l'équation (4.4). La figure E.1 présente les résultats et on peut voir qu'ils sont similaires à ceux présentés à la figure 2 dans Goździewski *et al.* [2001]. La valeur du MEGNO moyen tend vers 2 indiquant la stabilité du système.



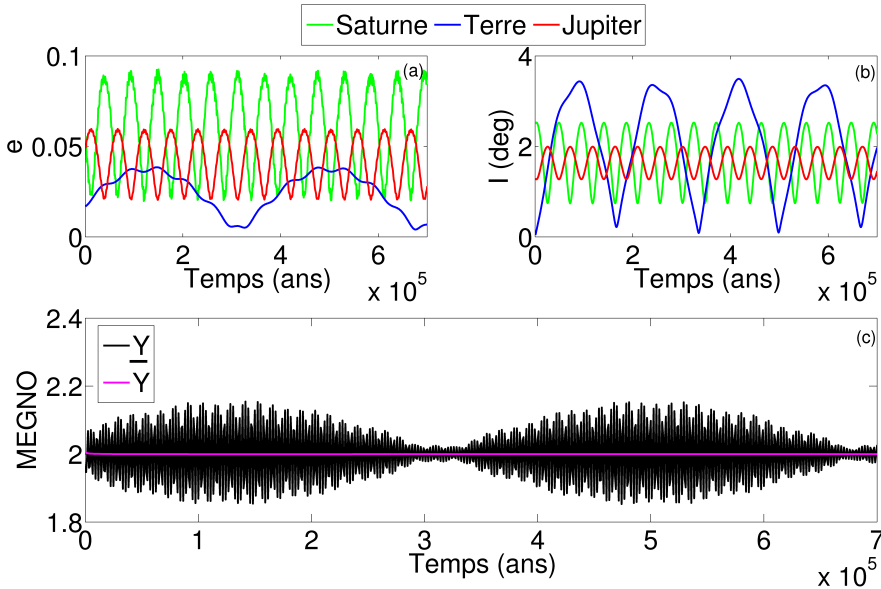


FIGURE E.1 – Résultats de l'intégration des équations du mouvement et des équations variationnelles associées dans le cadre d'un problème des 4 corps sans effet d'aplatissement contenant le Soleil, la Terre, Jupiter et Saturne. La figure (a) donne l'évolution en fonction du temps des excentricités des planètes, la figure (b) celle des inclinaisons en fonction du temps et le graphique (c) présente l'évolution de MEGNO et de sa moyenne en fonction du temps. Le MEGNO moyen tend vers 2 indiquant la stabilité du système. Ce résultat est comparé avec succès à la figure 2 de Goździewski *et al.* [2001].

## E.2 Validation NIMASTEP

Le logiciel NIMASTEP pour *Numerical Integration of the Motion of an Artificial Satellite orbiting a Telluric Planet* est un logiciel conçu et développé à Namur par N. Delsate [Delsate et Compère, 2012]. Ce code permet l'intégration des équations du mouvement en coordonnées cartésiennes d'un corps de masse ponctuelle autour d'un corps central et peut être appliqué à différents systèmes célestes (satellites naturels et artificiels, débris spatiaux, etc.).

Le logiciel NIMASTEP dispose de plusieurs intégrateurs et, en particulier, un intégrateur Adam-Bashforth-Moulton d'ordre 10 équivalent à celui développé par nos soins et présenté au chapitre 2. Le détecteur de chaos MEGNO est également intégré au logiciel permettant ainsi de comparer nos résultats à ceux obtenus par NIMASTEP.

La comparaison a été effectuée sur trois types de systèmes :

- Un système planétaire : Soleil avec Terre, Jupiter et Saturne.
- Un système de satellites autour d'un astéroïde : Silvia avec Romulus et Rémus
- Un système de satellites de planète : Uranus avec Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron.

L'ensemble de ces tests forme un tour d'horizon pour la validation : dans le premier cas, aucun effet d'aplatissement n'est considéré et le résultat peut être comparé à celui présenté dans Goździewski *et al.* [2001] (cf. Section E.1). Les deux autres tests considèrent l'effet d'aplatissement mais sont différents de par le système entrant en jeu. L'objectif de cette comparaison tient seulement dans l'analyse des résultats finaux sans tenir compte de la vitesse d'exécution, celle-ci étant biaisée dans le cadre du logiciel NIMASTEP, vu l'étendue des possibilités de ce code par rapport à celui développé de mon côté.

### E.2.1 Application au système uranien

Je reprends ici les résultats obtenus pour le système de satellites d'Uranus considérant les 5 satellites principaux et l'effet d'aplatissement  $J_2$ . Les résultats ont été comparés avec succès aux résultats obtenus par le logiciel NIMASTEP.

Les conditions initiales de la simulation présentée à la figure E.2 sont les paramètres physiques et les éléments orbitaux actuels définis dans les tables B.1 et B.3 à l'annexe B. Les figures E.2 (a), (b) et (c) donnent l'évolution au cours du temps de l'excentricité et de l'inclinaison de chaque satellite principal. La figure E.2 (d) représente les orbites stables dans un plan (X,Y) validant le résultat du détecteur de chaos dont la valeur moyenne tend rapidement vers 2 (e).

La figure E.3 présente un cas fortement chaotique où la masse et le demi-grand axe de Miranda ont été augmentés. Les autres conditions initiales sont fixées selon les tables B.1, B.2 et B.3 présentées en annexe B. La figure E.3 (a) représente les orbites des 5 satellites principaux dans un plan (X,Y). On observe l'orbite de Miranda placée entre les orbites d'Ariel et d'Umbriel, entraînant l'instabilité du système de satellites et se traduisant par une valeur moyenne du détecteur de chaos qui augmente linéairement avec le temps. La pente correspond à  $\lambda/2$  où  $\lambda$  est l'exposant maximal de Lyapunov [Cincotta *et al.*, 2003].

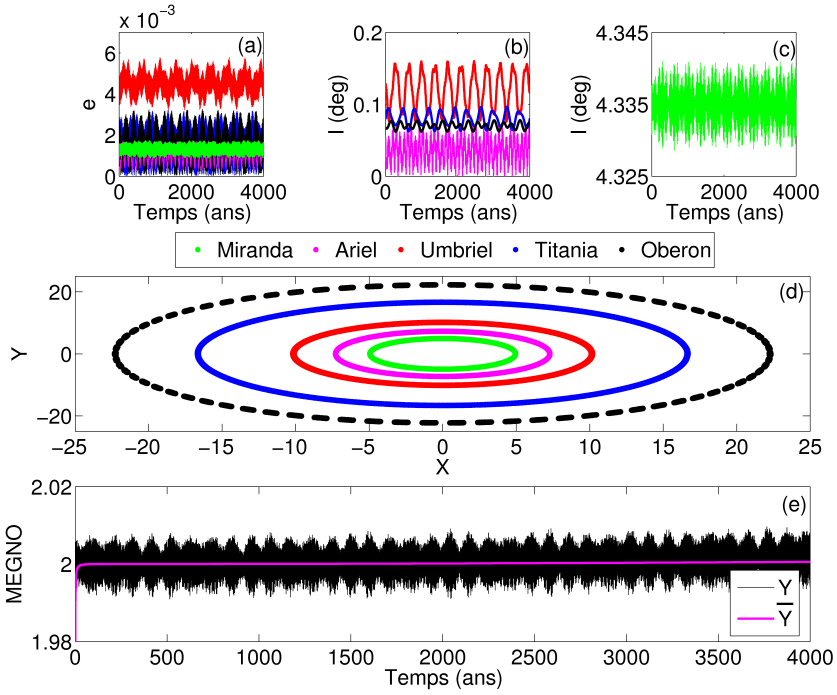


FIGURE E.2 – Résultats de l'intégration des équations du mouvement et des équations variationnelles associées dans le cadre d'un problème des 6 corps avec l'effet d'aplatissement contenant Uranus avec Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron. Les conditions initiales sont définies selon les tables B.1, B.2 et B.3 présentées en annexe B. La figure (a) donne l'évolution au cours du temps des excentricités des satellites, les figures (b) et (c) celle des inclinaisons au cours du temps. La figure (d) représente les 5 orbites dans un plan  $(X, Y)$  et le graphique (e) donne l'évolution de MEGNO et de sa moyenne au cours du temps. Le MEGNO moyen tend vers 2 indiquant la stabilité du système.

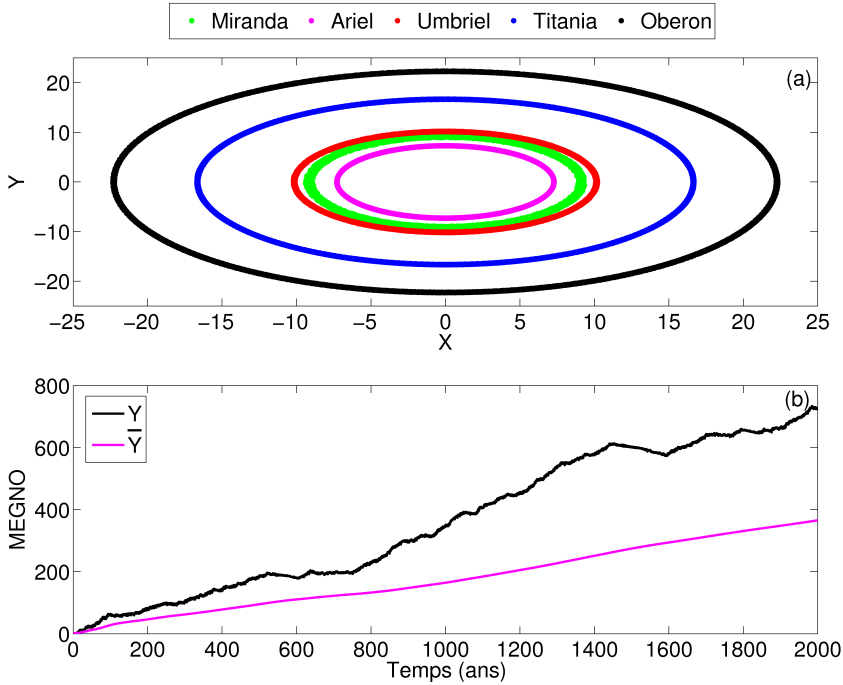


FIGURE E.3 – Résultats de l'intégration des équations du mouvement et des équations variationnelles associées dans le cadre d'un problème des 6 corps avec l'effet d'aplatissement contenant Uranus avec Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron. Les conditions initiales sont définies selon les tables B.1, B.2 et B.3 présentées en annexe B excepté pour le demi-grand axe et la masse de Miranda. La figure (a) représente les 5 orbites dans un plan  $(X, Y)$  et le graphique (b) donne l'évolution de MEGNO et de sa moyenne au cours du temps. Le MEGNO moyen augmente linéairement indiquant l'instabilité du système. La pente est donnée par  $\lambda/2$  où  $\lambda$  est l'exposant maximal de Lyapunov.

La figure E.4 considère les paramètres physiques et éléments orbitaux définis dans les tables B.1, B.2 et B.3 comme conditions initiales à la simulation, excepté pour le demi-grand axe de Miranda placé au bord de la résonance 3 : 1 en inclinaison  $I^2$  avec Umbriel. Les figures E.4 (a), (b) et (c) donnent l'évolution au cours du temps des excentricités et inclinaisons des 5 satellites principaux. La figure E.4 (d) donne l'évolution au cours du temps de l'argument résonant  $\theta_1$  associé à la résonance  $I^2$ . Celui-ci oscille entre les régimes libratoire et circulaire du fait de la proche distance de la séparatrice. Ces oscillations entre les deux régimes sont visibles dans l'évolution de l'inclinaison de Miranda (c) et dans l'évolution du MEGNO (d). En effet, le MEGNO évolue selon des plateaux quasi constants lorsque l'argument résonant est en libration et augmente

à chaque interruption de celle-ci (bords de la séparatrice) se traduisant par un MEGNO moyen en augmentation.

Les différents résultats résumés dans cette annexe et comparés à d'autres sources disponibles valident notre implémentation du détecteur de chaos MEGNO. Celui-ci est utilisé dans l'étude des espaces de phase de la résonance 3 : 1 entre Miranda et Umbriel au chapitre 4.

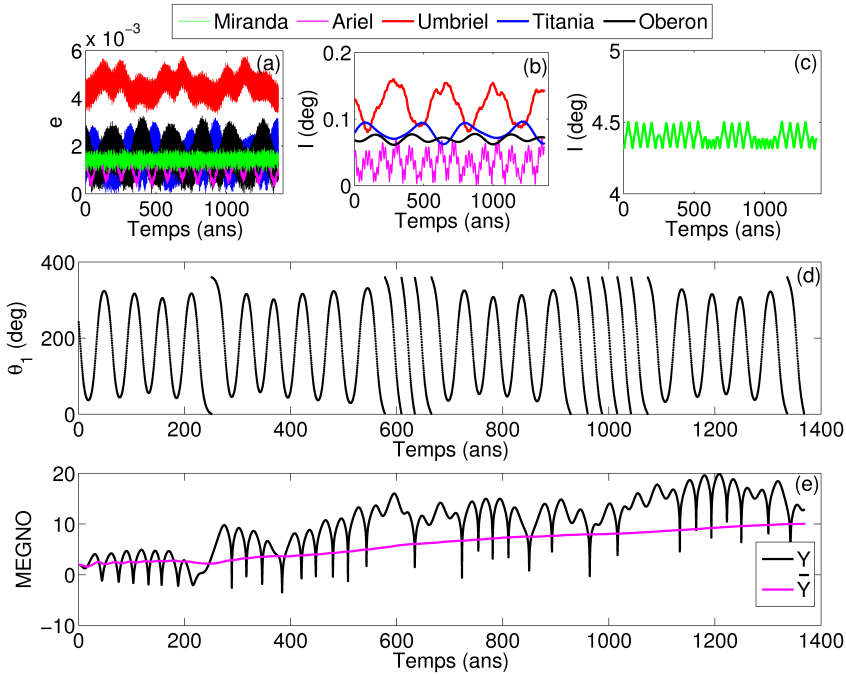


FIGURE E.4 – Résultats de l'intégration des équations du mouvement et des équations variationnelles associées dans le cadre d'un problème des 6 corps avec l'effet d'aplatissement contenant Uranus avec Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron. Les conditions initiales sont définies selon les tables B.1, B.2 et B.3 présentées en annexe B excepté pour le demi-grand axe de Miranda placé au bord de la résonance 3 : 1. La figure (a) donne l'évolution au cours du temps des excentricités des satellites, les figures (b) et (c) celle des inclinaisons au cours du temps. La figure (d) représente l'angle résonant  $\theta_1$  et le graphique (e) donne l'évolution de MEGNO et de sa moyenne au cours du temps.

# ANNEXE F

---

## Modèle excentrique

---

L'objectif est de présenter ici le modèle excentrique résultant du découplage de l'Hamiltonien à 4 degrés de liberté (4.16) en un problème incliné et excentrique. Les inclinaisons  $I$  et  $I'$  sont dès lors mises à zéro dans l'expression de l'Hamiltonien (4.16).

L'étape suivante du développement consiste en l'expression de cet Hamiltonien (4.16) dans un ensemble de variables canoniques, par exemple les éléments de Delaunay modifiés (3.10), avec dans le cas non-restreint :

$$L = m \sqrt{\mu a} , \quad (\text{F.1})$$

l'expression primée étant équivalente.

Suivant un processus similaire à celui détaillé dans le chapitre 3, un nouvel ensemble canonique de variables résonantes  $(\theta_M, \theta_U, J_M, J_U)$ , avec les indices  $M$  et  $U$  pour Miranda et Umbriel respectivement, est posé [Malhotra et Dermott, 1990] :

$$\theta_M = \frac{1}{2}\theta_6 , \quad (\text{F.2})$$

$$\theta_U = \frac{1}{2}\theta_4 , \quad (\text{F.3})$$

$$J_M = \frac{1}{2} m \sqrt{Gm_0 a} e^2 , \quad (\text{F.4})$$

$$J_U = \frac{1}{2} m' \sqrt{Gm_0 a'} e'^2 , \quad (\text{F.5})$$

et définit un Hamiltonien à deux degrés de liberté écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \nu_1 J_M + \nu_2 J_U - \beta (J_M + J_U)^2 \\ &+ 2\xi_1 J_M \cos 2\theta_M + 2\xi_2 (J_M J_U)^{1/2} \cos(\theta_M + \theta_U) \\ &+ 2\xi_3 J_U \cos 2\theta_U + 2\xi_4 (J_M J_U)^{1/2} \cos(\theta_M - \theta_U) ,\end{aligned}\quad (\text{F.6})$$

$\theta_i$ ,  $i = M/U$  étant les angles résonants pour la résonance 3 : 1 en excentricité entre Miranda et Umbriel et  $J_i$ , les variables associées données au plus petit ordre en masse et inclinaison. Le troisième angle de la résonance en excentricité  $\theta_5$  intervient comme combinaison linéaire des angles  $\theta_M$  et  $\theta_U$  sous la forme :

$$\begin{aligned}\theta_5 &= \frac{\theta_4 + \theta_6}{2} \\ &= \theta_M + \theta_U ,\end{aligned}$$

limitant le nombre de degrés de liberté de l'Hamiltonien. L'angle lié au coefficient  $\xi_4$  est le terme séculaire de l'Hamiltonien et comprend la différence des périodes de Miranda et Umbriel écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\omega_U - \omega_M &= \frac{\theta_6 - \theta_4}{2} \\ &= \theta_M - \theta_U .\end{aligned}$$

Le mouvement est décrit par les équations d'Hamilton-Jacobi (3.1) données par :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_M &= \nu_1 - 2\beta (J_M + J_U) + 2\xi_1 \cos 2\theta_M \\ &+ \xi_2 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_U \cos(\theta_M + \theta_U) + \xi_4 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_U \cos(\theta_M - \theta_U) \\ \dot{\theta}_U &= \nu_2 - 2\beta (J_M + J_U) + \xi_2 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_M \cos(\theta_M + \theta_U) \\ &+ 2\xi_3 \cos 2\theta_U + \xi_4 (J_M J_U)^{-\frac{1}{2}} J_M \cos(\theta_M - \theta_U) \\ \dot{J}_M &= 4\xi_1 J_M \sin 2\theta_M + 2\xi_2 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M + \theta_U) + 2\xi_4 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M - \theta_U) \\ \dot{J}_U &= 2\xi_2 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M + \theta_U) + 4\xi_3 J_U \sin 2\theta_U - 2\xi_4 (J_M J_U)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_M - \theta_U) .\end{aligned}\quad (\text{F.7})$$

Selon Malhotra [1988], les paramètres dépendants du problème sont définis par :

$$\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu_1 \quad \nu_2 = \nu_0 - \Delta\nu_2 , \quad (\text{F.8})$$

avec

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{1}{2} \left\{ 3n' \left[ 1 + 3J_2 \left( \frac{R_p}{a'} \right)^2 + \frac{m}{m_0} \left( 1 + \alpha \frac{d}{d\alpha} \right) b_{1/2}^{(0)}(\alpha) \right] \right. \\ &\quad \left. - n \left[ 1 + 3J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{m'}{m_0} \alpha^2 \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^{(0)}(\alpha) \right] \right\} ,\end{aligned}\quad (\text{F.9})$$

et

$$\Delta\nu_1 = \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m'}{m_0} \alpha^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \right] n , \quad (\text{F.10})$$

$$\Delta\nu_2 = \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a'} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{m_0} \alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \right] n' , \quad (\text{F.11})$$

$$\beta = \frac{3}{8} \left( 1 + 9 \frac{m/m'}{\alpha} \right) \frac{1}{m a^2} . \quad (\text{F.12})$$

L'expression  $\nu_0 = 0$  correspond à la commensurabilité 3 : 1 exacte entre les moyens mouvements de Miranda et d'Umbriel, et les  $\Delta\nu_i$  sont les corrections des vitesses de précession séculaire des péricentres  $\omega$  et  $\omega'$  sur la combinaison résonante des moyens mouvements des satellites. Nous définissons également les expressions des  $\xi_i$  liées à la résonance en inclinaison  $e^2$  [Malhotra et Dermott, 1990] :

$$\xi_1 = -n \frac{m'}{m_0} \alpha F_5(\alpha) , \quad (\text{F.13})$$

$$\xi_2 = -n \left[ \frac{m}{m_0} \frac{m'}{m_0} \right]^{1/2} \alpha^{5/4} F_6(\alpha) , \quad (\text{F.14})$$

$$\xi_3 = -n \frac{m}{m_0} \alpha^{3/2} F_7(\alpha) , \quad (\text{F.15})$$

$$\xi_4 = -n \left[ \frac{m}{m_0} \frac{m'}{m_0} \right]^{1/2} \alpha^{5/4} G_3(\alpha) , \quad (\text{F.16})$$

où les expressions pour  $F_i(\alpha)$   $i = 1, \dots, 3$  sont définies par (4.13) et  $G_3(\alpha)$  dans (4.15).





---

## Validation chauffage radiogénique

---

Nous validons notre approche du chauffage radiogénique par deux exemples présentés par Douce [2011]. Un premier exemple consiste à représenter l'évolution temporelle des éléments à longues demi-vies dans le cas de la Terre en se basant sur les concentrations actuelles observées [Kargel et Lewis, 1993] pour en déduire les concentrations initiales (5.1.2). La figure G.1 (a) montre le résultat de ce test : on y donne le taux de production radioactif  $H_{rad_i}$  sur une échelle de temps équivalente à la durée de vie du système solaire. La droite constante pointillée représente le flux sortant de chaleur dans le cas de la Terre et on note que le taux de chaleur amené par la désintégration des isotopes de longues demi-vies intervient actuellement pour la moitié de ce flux.

Le deuxième exemple met en exergue l'effet des éléments radiogéniques de courtes demi-vies dans le cas d'une étude sur des chondrites carbonées de type CI dont les concentrations actuelles sont données par Palme et Beer [1993]. Ces chondrites sont des météorites qui ont la particularité de contenir du silicate primitif. La composition des chondrites de type CI se rapproche le plus de la composition des corps formés au début du système solaire. La figure G.1 (b) montre le résultat du chauffage radiogénique sur les premiers 25 millions d'années après la formation du système solaire. On peut y voir la dominance du chauffage par les éléments de courtes demi-vies par rapport aux éléments à longues demi-vies sur une période de temps très courte à l'échelle géologique. Ces deux figures obtenues sont identiques à celles présentées dans Douce [2011].

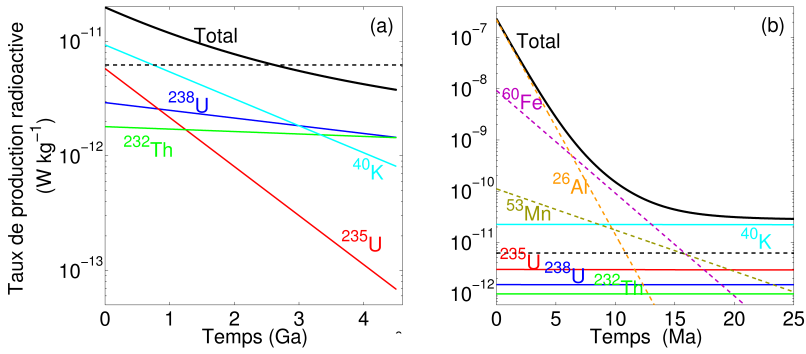


FIGURE G.1 – Exemples validant le chauffage radiogénique. La figure (a) est la représentation du taux de chaleur généré par les éléments radiogéniques de longues demi-vies dans le cas de la Terre. La figure (b) est appliquée dans le cas d'une chondrite carbonnée de type CI et montre l'effet des isotopes de courtes demi-vies. Reproduits de Douce [2011].

---

## Hamiltonian formulation of the variable mass problem

---

In memory of John Hadjidemetriou

*We propose a reformulation of the simple variable mass problem, published by Hadjidemetriou in 1963, using a Hamiltonian formulation, already proposed by Deprit in 1983, but obtained here through a Mathieu transform. The dynamics is simply analyzed as a perturbation problem, by adaptation of the adiabatic invariant problem to a slow but not linear variation of the mass. A special case is analyzed, for which a conservative problem can be deduced, once a suitable change of time is performed.*

### H.1 Introduction

Since the discovery of the exoplanet systems, in 1995, the dynamics of a body orbiting a variable mass star has received new interest. The most simple models are revisited, in the framework of the nowadays science and computer development. In particular the famous paper of Hadjidemetriou [1963] has never been so quoted and cited as in the last ten years.

We propose here to give a Hamiltonian version of the two-body problem with variable mass, already proposed by Deprit [1983] in another context and through a different method, valid for any eccentricity, and any power of the mass loss rate. The problem is rewritten as a time dependent Keplerian problem plus a perturbation, proportional to the eccentricity.

This formulation allows us to introduce angle - action variables, to average the Hamiltonian, and to rewrite the non averaged variables as functions of the

averaged ones. We follow the procedure given by Henrard [1993] adapted to the case of a non linear decrease of the parameter, here the time dependent mass. A particular case (with a mass loss following a power law with an exponent  $n = 3$ ) is analyzed and, through a suitable change of time, can be treated as a conservative problem.

## H.2 The time-dependent Hamiltonian

### H.2.1 The initial model

We start with a two-body problem, describing the Keplerian motion of a small mass around a central body of mass  $M$ . The motion of the small mass can be written as :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}, \quad (\text{H.1})$$

where  $G$  is the gravity constant, and  $\vec{r}$  is the position of the point mass with respect to the primary. The units will be chosen so that  $G = 1$ , and the Hamiltonian associated to this problem,  $\mathcal{H}$ , is written as :

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{M}{r}, \quad (\text{H.2})$$

where  $\vec{r} = (x, y, z)$  and  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  represent the position and velocity of the small body;  $r = \|\vec{r}\|$  and  $v = \|\vec{v}\|$  are their norms.

In the constant mass problem, we know that by introducing the orbital elements  $(a, e, i, l, \omega, \Omega)$ , where  $a$  is the semi-major axis,  $e$  the eccentricity,  $i$  the inclination,  $l$  the mean anomaly,  $\omega$  the argument of pericenter, and  $\Omega$  the longitude of the ascending node, the energy (or the Hamiltonian) depends only on  $a$ .

We assume now that the mass  $M$  is time dependent, i.e.  $M = M(t)$  and, following Hadjidemetriou [1963], we adopt the power law :

$$\frac{dM(t)}{dt} = \alpha M^n(t), \quad (\text{H.3})$$

where  $\alpha$  is a suitable constant (negative if the mass decreases with time). In Hadjidemetriou [1963],  $n$  is chosen in the range  $[0.4, 4.4]$ , but it could be extended to any value, with two special cases for  $n = 1$  and  $n = 3$  discussed later. The final Hamiltonian formulation is then :

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{M(t)}{r}. \quad (\text{H.4})$$

The potential is now  $V(r, t) = -\frac{M(t)}{r}$  corresponding to the central force (per unity of mass)  $\vec{F} = -\frac{M(t)}{r^3} \vec{r}$ . Consequently the angular momentum,  $\vec{C}$ , is still constant, as well as its norm :

$$\vec{C} = (C_x, C_y, C_z) = \vec{r} \times \vec{v}, \quad C = \|\vec{C}\| = \sqrt{M(t) a (1 - e^2)}. \quad (\text{H.5})$$

### H.2.2 Delaunay's formulation

Following the classical introduction of Delaunay's elements in the constant mass 2-body problem, we first introduce the spherical coordinates  $r$ ,  $\varphi$ , the latitude, and  $\Omega$ , playing here the role of the longitude, as new variables, and we deduce (through a Mathieu transform [Mathieu, 1874]) the definition of the associated momenta, so to form a new set of canonical coordinates  $(r, \varphi, \Omega, R, \Phi, H)$ . We find, in the mass variable case as in the classical one,  $R = \dot{r}$  associated to  $r$ ,  $\Phi = C$  the norm of the angular momentum, associated to  $\varphi$  and  $H = C_z$ , the third component of the angular momentum, associated to  $\Omega$ .

The corresponding Hamiltonian is written as :

$$\mathcal{H}(r, \varphi, \Omega, R, \Phi, t) = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} \right) - \frac{M(t)}{r}. \quad (\text{H.6})$$

The variables  $\varphi$  and  $\Omega$  are not present in the Hamiltonian, and consequently, the associated momenta  $\Phi$  and  $H$  are constants, as expected from the conservation of the angular momentum. In particular the couple  $(\Omega, H)$  does not play any further role in the coordinate changes.

The second canonical transformation, used in the constant mass approach, is introduced through a generating function  $S$ . It transforms the set  $(r, \varphi, R, \Phi)$  into the set  $(l, \omega, L, G)$ , such that the new Hamiltonian is independent of the two variables  $l$  and  $\omega$  and only dependent on the momenta, which are then constants. As  $\varphi$  is already constant, we choose  $G = \Phi = C$  and  $L = \sqrt{M(t)} a$ . The generating function  $S$  depends on the old variables,  $r$  and  $\varphi$ , on the new momenta,  $L$  and  $G$ , but, in the variable mass hypothesis, also on  $t$  :  $S = S(r, \varphi, L, G, t)$  and the following relations hold :

$$R = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \Phi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad l = \frac{\partial S}{\partial L}, \quad \omega = \frac{\partial S}{\partial G}. \quad (\text{H.7})$$

The function  $S$  generates a canonical transformation, provided that the determinant of the partial second derivatives of  $S$  matrix (the Hessian matrix) is not zero. The resulting Hamiltonian is given by the usual 2-body part to which the partial time derivative of the generating function adds a correction :

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (\text{H.8})$$

If the last term is zero, we find the usual (constant mass) Hamiltonian :  $\mathcal{H} = -\frac{M^2}{2L^2}$ . The calculation of the perturbing term,  $\frac{\partial S}{\partial t}$ , comes from the solution of the equations (H.7). First of all, knowing that the momentum  $G = \Phi$  is constant, we can write, using the second relation of (H.7) :

$$S = \varphi G + F(r, L, G, t), \quad (\text{H.9})$$

where  $F$  has to be determined. Then, using the first relation of (H.7), we obtain the following integral expression for  $F$  :

$$F(r, L, G, t) = \int_0^r \frac{1}{r} \left( -\frac{M^2(t)}{L^2} r^2 + 2 M(t) r - G^2 \right)^{\frac{1}{2}} dr. \quad (\text{H.10})$$

Using this last expression (H.10), and the fact that :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial M} \dot{M}(t),$$

we obtain the final Hamiltonian in Delaunay's elements :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\frac{M^2(t)}{2L^2} + \frac{\partial F}{\partial M} \dot{M}(t), \\ &= -\frac{M^2(t)}{2L^2} + \frac{\dot{M}(t)}{M(t)} L e \sin E. \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

where  $E$  represents the eccentric anomaly, which means that it depends on  $L$ ,  $G$  and  $l$ . This Hamiltonian is exactly the result obtained by Deprit [1983] through a different method. It is associated to four differential Hamiltonian equations :

$$\dot{l} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial L}, \quad \dot{\omega} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial G}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial l} \quad \text{et} \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \omega} = 0. \quad (\text{H.12})$$

After some mathematical manipulations, we obtain the evolution of the elliptic elements  $a$ ,  $e$ ,  $f$ , the true anomaly, and  $\omega$  versus time, finding the same differential equations as Hadjidemetriou [1963] but without the introduction of a pseudo-force :

$$\dot{a} = -a \frac{1 + 2e \cos f + e^2}{1 - e^2} \frac{\dot{M}(t)}{M(t)}, \quad (\text{H.13})$$

$$\dot{e} = -(e + \cos f) \frac{\dot{M}(t)}{M(t)}, \quad (\text{H.14})$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\sin f}{e} \frac{\dot{M}(t)}{M(t)}, \quad (\text{H.15})$$

$$\dot{f} = \frac{C(1 + e \cos f)^2}{a^2(1 - e^2)^2} + \frac{\sin f}{e} \frac{\dot{M}(t)}{M(t)}. \quad (\text{H.16})$$

If we introduce the variation of the mass loss law (H.3) in (H.11), we obtain the following Hamiltonian :

$$\mathcal{K} = -\frac{M^2}{2L^2} + \alpha M^{n-1} L e \sin E, \quad (\text{H.17})$$

where  $M = M(t)$ .

### H.3 The case $n = 3$

As noticed but not explained by Hadjidemetriou [1963], a special treatment is required for the exponent  $n = 3$ . In this case, we can extract the factor  $M^2$  from the two terms and rewrite the Hamiltonian (H.11) as the product of a function of time by an autonomous Hamiltonian  $\mathcal{U}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(l, \omega, L, G, t) &= M^2(t) \left( -\frac{1}{2L^2} + \alpha L e \sin E \right) \\ &= M^2(t) \mathcal{U}(l, \omega, L, G) = M^2(t) \mathcal{U}(l, -, L, G). \quad (\text{H.18})\end{aligned}$$

This Hamiltonian  $\mathcal{U}$  is independent of the time; a simple change of time ( $t$  is replaced by  $\tau$  with  $\dot{\tau} = M^2(t)$ ) makes the two Hamiltonian problems,  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{U}$ , equivalent. They have the same dynamical behavior, measured on a different time scale. Let us notice that the mass dynamics with respect to  $\tau$  is exponential :

$$\frac{dM}{d\tau} = \frac{dM}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \alpha M^3 \frac{1}{M^2} = \alpha M \quad \text{which leads to} \quad M = M_0 e^{\alpha \tau}. \quad (\text{H.19})$$

In the dynamics induced by the Hamiltonian  $\mathcal{U}$ , if we consider the time  $\tau$ , the behavior of the eccentricity is periodic, while it has a larger and larger period if we consider the initial time  $t$ . The same conclusion is valid for the semi-major axis.

The figure H.1 shows the numerical results for this very particular case, where the mass loss is only a change of time scale. The initial conditions are  $a_0 = 1$ ,  $e_0 = 0$ ,  $l_0 = 0$ ,  $\alpha = -0.02$ ,  $M_0 = 1$ , for  $n = 3$ . The eccentricity is represented as a function of the time  $t$  (top), of the time  $\tau$  (middle) and as a function of the (decreasing) mass (bottom), which is exactly the result shown in Figure 8 of Hadjidemetriou [1963].

The Hamiltonian  $\mathcal{U}$  represents a conservative periodic one degree of freedom problem. It could be associated to action-angle variables,  $J$  and  $\psi$ , defined so that :

$$\mathcal{U}(l, -, L, G) = \mathcal{U}(J, \psi, -, G) = \mathcal{U}(J, -, -, G). \quad (\text{H.20})$$

For any level  $\mathcal{U} = \mu$ , we can write :

$$\mu = \mathcal{U}(l, -, L, G) = -\frac{1}{2L^2} + \alpha \sqrt{L^2 - G^2} \sin E(l, L, G), \quad (\text{H.21})$$

which is associated to a polynomial of degree 3 in  $L^2$  :

$$4 \alpha^2 \sin^2 E L^6 - 4(\alpha^2 G^2 \sin^2 E + \mu^2) L^4 - 4 \mu L^2 - 1 = 0. \quad (\text{H.22})$$



The formulae of Cardan allows to express  $L^2$  as a function of  $E$ , depending on the values of  $\mu$  and  $G$ , and implicitly, the action  $J$  is given by the integral equation :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(E, \mu, G) (1 - e \cos E) dE \quad (\text{H.23})$$

with  $e L = \sqrt{L^2(E, \mu, G) - G^2}$ .

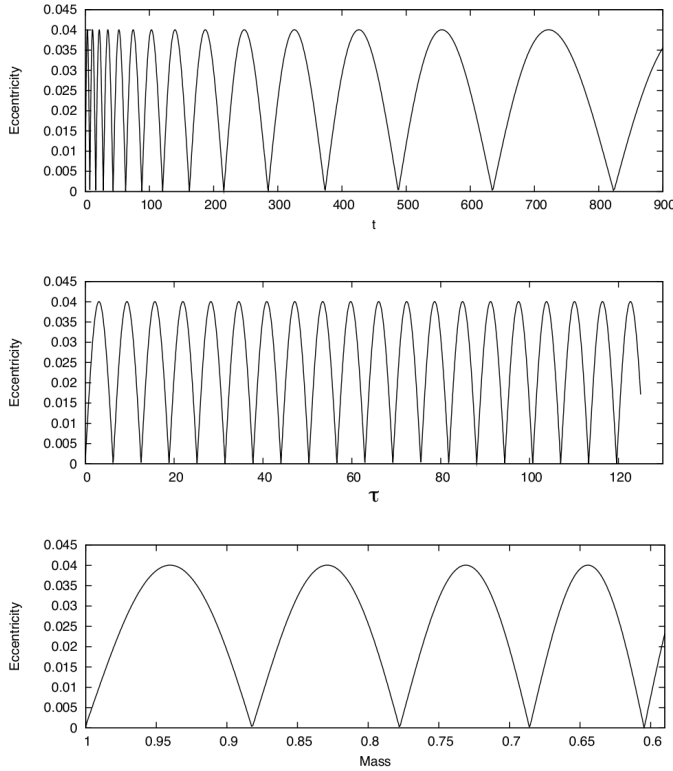


FIGURE H.1 – For the initial conditions  $a_0 = 1$ ,  $e_0 = 0$ ,  $l_0 = 0$ ,  $\alpha = -0.02$ ,  $M_0 = 1$ ,  $n = 3$  : (top) the eccentricity versus time  $t$ , (middle) the eccentricity versus time  $\tau$ , (bottom) the eccentricity versus (decreasing) mass.

It is not possible to obtain an analytical expression for  $J = J(\mu, G)$ , to be then rewritten as :  $\mu = \mathcal{U}(J, G)$ . Theoretically the frequency  $\dot{\psi}$  is given by the partial derivative of  $\mathcal{U}$  with respect to  $J$ , or by the inverse of the partial derivative of  $J$  with respect to  $\mathcal{U}$ . It could be expressed by an integral formulation of an implicit function again.

However giving an initial condition  $L_0$  and  $E_0 = 0$ , we can calculate the

value of the Hamiltonian  $\mu$  :  $\mu = -\frac{1}{2L_0^2}$ . If we assume that  $\alpha$  is small, we express  $L$  as  $L = L_0(1 + \Delta)$ , and we calculate a first order approximation for  $\Delta$  as the ratio of two polynomials of degree 2 in  $\sin E$ . This expression allows to calculate  $J$  as a function of  $\mu$  and  $G$ , but in a very tricky formulation, and a frequency  $\psi$  can be theoretically deduced.

## H.4 The perturbation theory

The formulation of the Hamiltonian (H.17) is suitable to apply a simple perturbation theory, if we assume that the parameter  $\alpha$  is small. Following the approach of Henrard [1993], we separate  $\mathcal{K}$  into two parts : a part  $\mathcal{K}_0$  depending only on  $L$  and a second part,  $\mathcal{K}_1$ , depending on  $l$  and  $L$  (and on the constant value of  $G$  of course). Both parts depend on the time through  $M$ , which plays the role of parameter. We can write :

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= -\frac{M^2}{2L^2} + \alpha M^{n-1} L e \sin E, \\ &= -\frac{M^2}{2L^2} + \alpha M^{n-1} \sqrt{L^2 - G^2} \sin E(l, L), \\ &= \mathcal{K}_0(L, M) + \mathcal{K}_1(l, L, M).\end{aligned}\tag{H.24}$$

$M$  is the parameter slowly varying with the time. In Henrard [1993], the parameter is assumed to be a linear function of time ( $\epsilon t$ ) but in this context, it is not the case :  $M(t)$  follows the law given by the equation (H.3).

### H.4.1 Dynamics of $\mathcal{K}_0$

The dynamics of  $\mathcal{K}_0$  is very simple, the problem being already written in action-angle variables, but the dependance on time is present. We obtain :

$$\dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial l} = 0,\tag{H.25}$$

$$\dot{l} = \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial L} = \frac{M^2}{L^3},\tag{H.26}$$

with  $M(t)$  is given explicitly (by solving (H.3)) :

$$\begin{aligned}M(t) &= M_0 e^{\alpha t} & \text{if } n = 1 \\ M(t) &= (\alpha(1-n)t + M_0^{(1-n)})^{\frac{1}{1-n}} & \text{if } n \neq 1\end{aligned}$$

It means that  $L(t) = L_0$  is a constant and that (for  $n \neq 3$ ) :

$$l(t) = l_0 + \frac{M_0^{3-n} - M_0^{3-n}}{L_0^3 \alpha (3-n)}\tag{H.27}$$

when  $M = M_0$  and  $l = l_0$  are the initial conditions at time  $t = 0$ . The angle  $l$  is not a linear function of time, contrarily to the classical adiabatic invariant theory.

The semi-major axis behavior is directly calculated from  $L_0$  :

$$a(t) = \frac{L_0^2}{M(t)}, \quad (\text{H.28})$$

and the eccentricity is computed by :

$$e(t) = \sqrt{1 - \frac{G}{L_0}} = e_0, \quad (\text{H.29})$$

and is constant.

The Figures (H.2) give an example of this simple  $\mathcal{K}_0$  dynamics, for the initial conditions  $a_0 = 1$ ,  $l_0 = 0$ ,  $\alpha = -0.01$ ,  $M_0 = 1$ , for  $n = 4$  and  $n = 1.5$ , for the semi-major axis (top), for the mean longitude (middle) and for the mass (bottom).

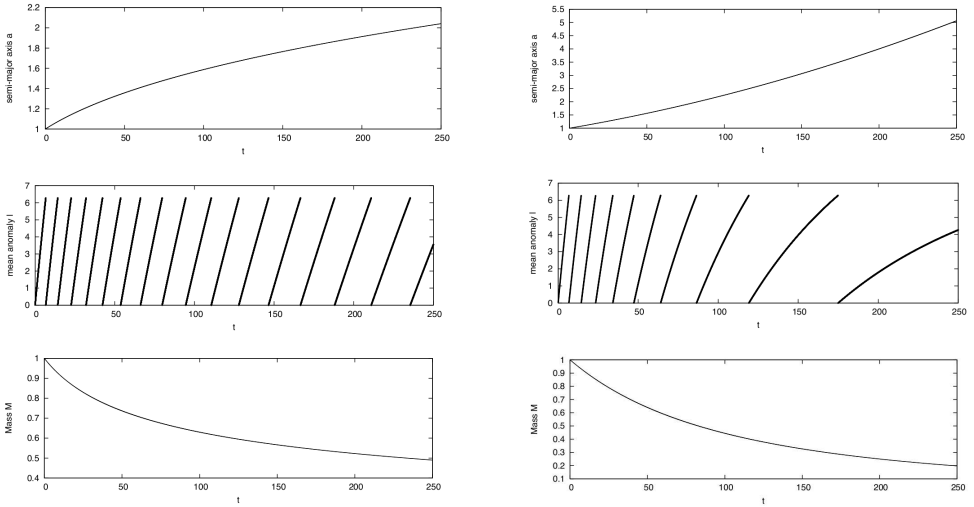


FIGURE H.2 – On the left : for the initial conditions  $a_0 = 1$ ,  $l_0 = 0$ ,  $\alpha = -0.01$ ,  $M_0 = 1$ , and  $n = 4$  : the dynamics induced by  $\mathcal{K}_0$  for : (top) the semi-major axis, (middle) the mean longitude, (bottom) the mass. On the right : the same graphics for  $n = 1.5$ .

### H.4.2 Averaging process

We average the Hamiltonian  $\mathcal{K}$  over the angle  $l$ ; using a Lie triangle of the first order, associated to a generator  $W_1$ , we define, following Henrard [1970] :

$$\begin{aligned} K_0^0 &= \mathcal{K}_0, \\ K_1^0 &= \mathcal{K}_1, \\ K_0^1 &= \langle \mathcal{K}_1 \rangle_l, \\ &= K_1^0 + \{K_0^0; W_1\} = K_1^0 - \frac{\partial K_0^0}{\partial L} \frac{\partial W_1}{\partial l}, \end{aligned} \quad (\text{H.30})$$

where  $\langle \cdot \rangle_l$  represents the average over  $l$  and  $\{ \cdot \}$  the Poisson bracket.

We calculate easily  $K_0^1$  :

$$\begin{aligned} K_0^1 &= \langle \mathcal{K}_1 \rangle_l, \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{n-1} \sqrt{L^2 - G^2} \sin E \, dl, \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{n-1} \sqrt{L^2 - G^2} \sin E (1 - e \cos E) \, dE, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{H.31})$$

The new Hamiltonian,  $\bar{K}$ , written in averaged variables,  $\bar{L}$  and  $\bar{l}$ , is reduced to  $\bar{K} = \bar{K}_0(\bar{L}, M) + O(\alpha^2)$  and depends on time, through  $M(t)$ . The values of  $\bar{L}$  and  $\bar{l}$  correspond to the dynamics of  $\mathcal{K}_0$ ,  $\bar{L}$  is then a constant, and  $\bar{l}$  is given by (H.27).

The first-order generator is calculated explicitly by (H.30) :

$$W_1 = -\alpha \sqrt{L^2 - G^2} M^{n-3} L^2 (L \cos E - \frac{1}{4} \sqrt{L^2 - G^2} \cos 2E). \quad (\text{H.32})$$

The canonical transformation between non-averaged  $(l, L)$  and averaged variables  $(\bar{l}, \bar{L})$  is given by the formulae :

$$\begin{aligned} L &= \bar{L} + (L; W_1)|_{(\bar{l}, \bar{L})} \\ &= \bar{L} - \frac{\partial W_1}{\partial l}|_{(\bar{l}, \bar{L})} \\ &= \bar{L} - \alpha M^{n-3} \bar{L}^4 \bar{e} \sin \bar{E} \end{aligned} \quad (\text{H.33})$$

$$\begin{aligned} l &= \bar{l} + (l; W_1)|_{(\bar{l}, \bar{L})} \\ &= \bar{l} + \frac{\partial W_1}{\partial L}|_{(\bar{l}, \bar{L})} \\ &= \bar{l} + \alpha M^{n-3} P(\bar{l}, \bar{L}) \end{aligned} \quad (\text{H.34})$$

with

$$\begin{aligned}
 P(\bar{l}, \bar{L}) &= -\bar{L}^3 \frac{\cos \bar{E}}{\bar{e}} + G^2 \bar{L} \sin^2 \bar{E} (1 - \bar{e} \cos \bar{E}) - 3 \bar{L}^3 \bar{e} \cos \bar{E} \\
 &+ \frac{\bar{L}}{2} (2 \bar{L}^2 - G^2) \cos 2 \bar{E} - \frac{G^2 \bar{L}}{2} \bar{e} \sin \bar{E} \sin 2 \bar{E} (1 - \bar{e} \cos \bar{E}), \\
 &\simeq -\bar{L}^3 \frac{\cos \bar{E}}{\bar{e}},
 \end{aligned} \tag{H.35}$$

with  $\bar{l} = \bar{E} - \bar{e} \sin \bar{E}$  and  $\bar{L} \bar{e} = \sqrt{\bar{L}^2 - G^2}$ . The formulae are not valid for  $\bar{e} = 0$  but the perturbation itself disappears for circular orbits. The first term in  $P$  is the dominant one, especially if  $e$  is very small.

### H.4.3 Comparisons

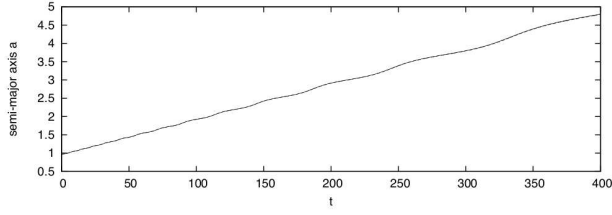
Choosing values for  $M_0$ ,  $\bar{L}$  and of  $\bar{l}_0$ , we calculate through (H.33) and (H.34) the initial values of  $L_0$  and  $l_0$ , and we compare the dynamical evolution of  $L(t)$  and  $l(t)$  given by our equations with a classical numerical integration of the non averaged Hamiltonian.

The Figures (H.3) represent, for the initial conditions  $a_0 = 1$ ,  $l_0 = 0$ ,  $\alpha = -0.01$ ,  $M_0 = 1$ , and for  $n = 2$ , the semi-major axes (a) and the eccentricities (b), obtained by numerical integration (dashed line) and through the analytical formulae of the perturbation theory (continuous lines). The last two figures give the differences between both methods, for the semi-major axes (c), and for the eccentricities (d). The differences are clearly of the order of  $\alpha^2$ .

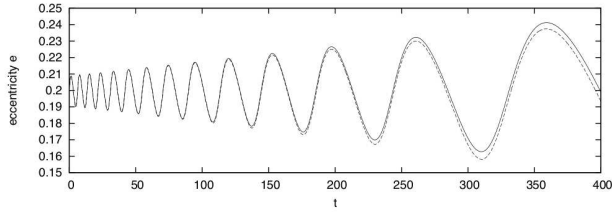
## H.5 Conclusions

This analytical work is a reformulation of the problem published by Hadjimetriou [1963] : we retrieve the same results with our new approach.

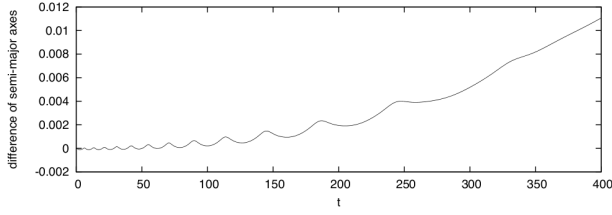
The Hamiltonian formalism associated with the variable mass problem is well adapted to a perturbation approach. If the parameter  $\alpha$  which characterizes the mass loss, is small enough, the first order canonical transformation into action-angle variables gives an explicit and quite precise analytical solution for the elliptic elements, valid for all values of the eccentricity. The adiabatic invariant theory has been applied here, in the case of a non linear but slow variation of the parameter. The model is valid for any power of the mass loss law. The case  $n = 3$  requires a special treatment, leading to an equivalence with a periodic dynamics, with a different time.



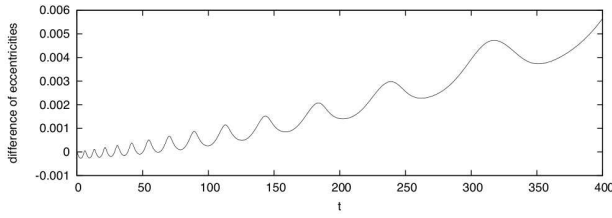
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE H.3 – Comparison between the analytic formula (continuous line) and a numerical integration (dashed line) of the non-averaged Hamiltonian. The initial conditions are  $\bar{L}_0 = 0.98$ ,  $\bar{l}_0 = 0$ ,  $\alpha = -0.01$ ,  $M_0 = 1$ , for  $n = 2$  : (a) the semi-major axes, (b) the eccentricities, (c) the difference of the semi-major axes, (d) the difference of the eccentricities, versus time.



# Bibliographie





---

## Bibliographie

---

- ANDRADE, E. (1910). On the viscous flow in metals, and allied phenomena. *In Royal Society Proceedings*, volume 84, pages 1–12. The Royal Society of London.
- ARCHINAL, B., A’HEARN, M., BOWELL, E. *et al.* (2011). Report of the IAU Working group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements : 2009. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 109:101–135.
- ARRIDGE, C., AGNOR, C., ANDRÉ, N. *et al.* (2012). Uranus Pathfinder : exploring the origins and evolution of Ice Giant planets. *Experimental Astronomy*, 33:753–791.
- BENETTIN, G., GALGANI, L., GIORGILLI, A. *et* STRELCYN, J.-M. (1980). Lyapunov Characteristics exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems ; A method for computing all of them. Part 1 : Theory. *Meccanica*, 15:9–20.
- BROWN, R. *et* CLARK, R. (1984). Surface of Miranda - Identification of water ice. *Icarus*, 58:288–292.
- BROWN, R., JOHNSON, T., SYNNOTT, S., ANDERSON, J. *et* JACOBSON, R. (1991). Physical properties of the Uranian Satellites. *In Uranus*, Space Science Series, pages 513–527. The University of Arizona Press.
- CANDY, J. *et* ROZMUS, W. (1991). A Symplectic Integration Algorithm for Separable Hamiltonian Functions. *Journal of Computational Physics*, 92: 230–256.
- CARLETTI, T. (2007). *Géométrie Symplectique*. Facultés Notre-Dame de la Paix, Namur, Belgium.

- CASTILLO-ROGEZ, J., MATSON, D., SOTIN, S., JOHNSON, T., LUNINE, J. et THOMAS, P. (2007). Iapetus' geophysics : Rotation rate, shape, and equatorial ridge. *Icarus*, 190:179–202.
- CHAMPENOIS, S. (1998). *Dynamique de la résonance entre Mimas et Téthys, premier et troisième satellites de Saturne*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, France.
- CHIRIKOV, B. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263–379.
- CINCOTTA, P., GIORDANO, C. et SIMÒ, C. (2003). Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits. *Physica D*, 182:151–178.
- CINCOTTA, P. et SIMÒ, C. (2000). Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I. *Astronomy and Astrophysics*, 147:205–228.
- DELSATE, N. (2011). *Modélisation et analyse de la dynamique orbitale : équilibre, résonance et chaos*. Thèse de doctorat, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur, Belgium.
- DELSATE, N. et COMPÈRE, A. (2012). NIMASTEP : a software to modelize, study, and analyze the dynamics of various small objects orbiting specific bodies. *Astronomy and Astrophysics*, 540:A120.
- DEPRIT, A. (1983). The secular accelerations in Gylden's problem. *Celestial Mechanics*, 31:1–22.
- DERMOTT, S. (1984). Origin and evolution of the Uranian and Neptunian satellites : Some dynamical considerations. In *NASA Conference Publication*, volume 2330, pages 377–404. NASA, United States.
- DERMOTT, S., MALHOTRA, R. et MURRAY, C. (1988). Dynamics of the Uranian and Saturnian satellite systems- A chaotic route to melting Miranda? *Icarus*, 76:295–334.
- DOUCE, E. (2011). *Thermodynamics of the Earth and Planets*. Cambridge University Press, New York, 1ère édition.
- DUNCAN, M. et LISSAUER, J. (1997). Orbital Stability of the Uranian Satellite System. *Icarus*, 125:1–12.
- DURIEZ, L. (1977). Théorie Générale Planétaire en Variables Elliptiques. I. Développement des Equations. *Astronomy and Astrophysics*, 54:93–112.
- DURIEZ, L. (2002). *Cours de Mécanique Céleste classique*. Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides, Paris, France.

- EFROIMSKY, M. (2012). Tidal Dissipation Compared to Seismic Dissipation : In Small Bodies, Earths, and Super-Earths. *The Astrophysical Journal*, 746: 150–170.
- EFROIMSKY, M. et LAINEY, V. (2007). Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution. *Journal of Geophysical Research*, 112:E12003.
- EMEL'YANOV, N. et NIKONCHUK, D. V. (2013). Ephemerides of the main Uranian satellites. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436:3668—3679.
- FOWLER, C. (1990). *The solid Earth. An introduction to global Geophysics*. Cambridge University Press, New York, 2ème édition.
- FRENCH, R. et SHOWALTER, M. (2012). Cupid is doomed : An analysis of the stability of the inner uranian satellites. *Icarus*, 220:911–921.
- GAVRILOV, S. et ZHARKOV, V. (1977). Love numbers of the giant planets. *Icarus*, 32:443–449.
- GOLDREICH, P. et SOTER, S. (1966). Q in the Solar System. *Icarus*, 5:375–389.
- GOŹDZIEWSKI, K., BOIS, E., MACIEJEWSKI, A. et KISEVELA-EGGLETON, L. (2001). Global dynamics of planetary systems with the MEGNO criterion. *Astronomy and Astrophysics*, 378:569–586.
- GREENBERG, S., CROFT, J., JANES, D., KARGEL, J., LEBOSKY, L., LUNINE, J., MARCIALIS, H., MELOSH, G., G.W., O. et STROM, R. (1991). Miranda. In BERGSTRALH, J., MINER, E. et MATTHEWS, S., éditeurs : *Uranus*. The University of Arizona Press.
- GUTIERREZ-MIRAVETE, E. (2004). *Conduction Heat Transfer*. Rensselaer Hartford Campus, Hartford, United States.
- HADJIDEMETRIOU, J. (1963). Two-body problem with variable mass : A new approach. *Icarus*, 2:440–451.
- HAIRER, E., NØRSETT, S. et WANNER, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, volume I. Springer Series in Computational Mathematics, 2ème édition.
- HENRARD, J. (1970). On a perturbation theory using Lie transforms. *Celestial Mechanics*, 3:107–120.
- HENRARD, J. (1982). Capture into resonance - an extension of the use of adiabatic invariants. *Celestial Mechanics*, 27:3–22.
- HENRARD, J. (1993). The Adiabatic Invariant in Celestial Mechanics. *Dynamics reported*, 2:117–235.

- HENRARD, J. et CARANICOLAS, N. (1990). Motion near the 3/1 resonance of the planar elliptic restricted three body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 47:99–121.
- HENRARD, J. et SATO, M. (1990). The origin of chaotic behaviour in the Miranda-Umbriel 3/1 resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 47:391–417.
- HINSE, T., CHRISTOU, A., ALVARELLOS, J. et GOŹDZIEWSKI, K. (2010). Application of the MEGNO technique to the dynamics of Jovian irregular satellites. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 404:837–857.
- HOWETT, C. J. A., SPENCER, J. R., PEARL, J. et SEGURA, M. (2011). High heat flow from Enceladus' south polar region measured using 10-600 cm<sup>-1</sup> Cassini/CIRS data. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 116:3003.
- HUBAUX, C., LIBERT, A.-S., DELSATE, N. et CARLETTI, T. (2013). Influence of Earth's shadowing effects on space debris stability. *Advances in Space Research*, 51:25–38.
- HUSSMANN, H., SOHL, F. et SPOHN, T. (2006). Subsurface oceans and deep interiors of medium-sized outer planet satellites and large trans-neptunian objects. *Icarus*, 185:258–273.
- HUSSMANN, H., SOTIN, C. et LUNINE, J. (2009). *Interiors and Evolution of Icy Satellites*, volume 10 de *Planets and Moons : Treatise on Geophysics*, chapitre 15. Elsevier, Germany.
- JACOBSON, R. (1992). Astrographic observations of the major Uranian satellites from Voyager 2. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 96:549–563.
- JACOBSON, R. (1998). The Orbits of the Inner Uranian Satellites from Hubble Space Telescope and Voyager 2 Observations. *The Astronomical Journal*, 115:1195–1199.
- JACOBSON, R. (2007). The Gravity Field of the Uranian System and the Orbits of the Uranian Satellites and Rings. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #39*, volume 39, page 453. Bulletin of the American Astronomical Society.
- JANCART, S. et LEMAITRE, A. (2001). Dissipative forces and external resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81:75–80.
- JANES, D. et MELOSH, H. (1988). Sinkers tectonics - an approach to the surface of Miranda. *Journal of Geophysical Research*, 93:3127–3143.
- KARATO, S. (1998). *Deformation of Earth Materials : An Introduction to the Rheology of Solid Earth*. Cambridge University Press, New York.

- KARGEL, J. et LEWIS, J. (1993). The Composition and Early Evolution of Earth. *Icarus*, 105:1–25.
- KARKOSCHKA, E. (1999). S/1986 U 10. *IAU Circular*, 7171:1.
- KAULA, W. (1964). Tidal Dissipation by Solid Friction and the Resulting Orbital Evolution. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2:661–685.
- KUMAR, K., de PATER, I. et SHOWALTER, M. (2011). Orbital dynamics of Mab. In *EPSC-DPS Joint Meeting 2011*, volume 6, page 669. American Astronomical Society.
- LAINÉY, V., ARLOT, J.-E., KARATEKIN, Ö. et VAN HOOUST, T. (2009). Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*, 459:957–959.
- LAINÉY, V., KARATEKIN, Ö., DESMARS, J. et al. (2012). Strong tidal dissipation in Saturn and constraints on Enceladus’ thermal state from astrometry. *The Astrophysical Journal*, 752:14–23.
- LASKAR, J. (1986). A general theory for the Uranian satellites. *Astronomy and Astrophysics*, 166:349–358.
- LASKAR, J. (1993). Frequency analysis of a dynamical system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56:191–196.
- LASKAR, J. (2005). *Frequency Map Analysis and quasiperiodic decompositions*, chapitre 2. Hamiltonian Systems and Fourier Analysis : New Prospects for Gravitational Dynamics. Cambridge Scientific Publishers Ltd.
- LASKAR, J. et JACOBSON, R. (1987). GUST86. An analytical ephemeris of the Uranian satellites. *Astronomy and Astrophysics*, 188:212–224.
- LEMAITRE, A. (1984). High-order resonances in the restricted three-body problem. *Celestial Mechanics*, 32:109–126.
- LEVISON, H. et DUNCAN, M. (1994). The long-term dynamical behavior of short-period comets. *Icarus*, 108:18–36.
- LOVE, A. (1906). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, New York.
- MAFFIONE, N., DARRIBA, L., CINCOTTA, P. et GIORDANO, C. (2011). A comparison of different indicators of chaos based on the deviation vectors : application to symplectic mappings. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111:285–307.
- MALHOTRA, R. (1988). *Some aspects of the dynamics of orbit-orbit resonances in the uranian satellite system*. Thèse de doctorat, Cornell University, United States.

- MALHOTRA, R. (1991). Tidal origin of the Laplace Resonance and the resurfacing of Ganymede. *Icarus*, 94:399–412.
- MALHOTRA, R. et DERMOTT, S. (1990). The role of secondary resonances in the orbital history of Miranda. *Icarus*, 85:444–480.
- MATHIEU, M. (1874). Mémoire sur les équations différentielles canoniques de la Mécanique. *Journal de Mathématiques*, XIX:265–296.
- MAVKO, G., MUKERJI, T. et DVORKIN, J. (2009). *The Rock Physics Handbook : Tools for Seismic Analysis of Porous Media*. Cambridge University Press, New York, 2ème édition.
- MEYER, J. et WISDOM, J. (2007). Tidal heating in Enceladus. *Icarus*, 188:535–539.
- MONTENBRUCK, O. et GILL, E. (2000). *Satellite Orbits : Models, Methods, Applications*. Springer Berlin Heidelberg, New York, 1ère édition.
- MOONS, M. et HENRARD, J. (1994). Surfaces of section in the Miranda-Umbriel 3 : 1 inclination problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 59:129–148.
- MORBIDELLI, A. (2002). *Modern Celestial Mechanics : Dynamics in the Solar System*. Advances in Astronomy and Astrophysics. CRC Press, United States, 1ère édition.
- MORBIDELLI, A. et MOONS, M. (1993). Secular resonances inside mean motion commensurabilities : The 2/1 and 3/2 cases. *Icarus*, 103:99–108.
- MURRAY, C. et DERMOTT, S. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, New York.
- NOYELLES, B. (2010). Theory of the rotation of Janus and Epimetheus. *Icarus*, 207:887–902.
- NOYELLES, B., LEMAÎTRE, A. et VIENNE, A. (2008). Titan’s rotation : A 3-dimensional theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101:13–30.
- OJAKANGAS, G. et STEVENSON, D. (1986). Episodic Volcanism of Tidally Heated Satellites with Application to Io. *Icarus*, 66:341–358.
- PALME, H. et BEER, H. (1993). Abundances of the elements in the solar system. In *Landolt-Bornstein Group VI : Astronomy and Astrophysics : Instruments ; Methods ; Solar System*, pages 196–221. Springer Berlin Heidelberg.
- PAPPALARDO, R., REYNOLDS, S. et GREELEY, R. (1997). Extensional tilt blocks on Miranda : Evidence for an upwelling origin of Arden Corona. *Journal of Geophysical Research*, 102:13369–13379.

- PARMENTIER, E. et ZUBER, M. (2007). Early evolution of Mars with mantle compositional stratification or hydrothermal crustal cooling. *Journal of Geophysical research*, 112:2007–2018.
- PEALE, S. (1988). Speculative histories of the Uranian satellite system. *Icarus*, 74:153–171.
- PEALE, S. (1999). Origin and Evolution of the Natural Satellites. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 37:533–602.
- PEALE, S. et CASSEN, P. (1978). Contribution of tidal dissipation to lunar thermal history. *Icarus*, 36:245–269.
- PEALE, S., CASSEN, P. et REYNOLDS, R. (1979). Melting of Io by tidal dissipation. *Science*, 203:892–894.
- PELTIER, W. (1974). The impulse response of a Maxwell earth. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 12:649–669.
- PLESCIA, J. (1987). Geological terrains and crater frequencies on Ariel. *Nature*, 327:201–204.
- PLESCIA, J. (1988). Cratering history of Miranda - Implications for geologic processes. *Icarus*, 73:442–461.
- PORCO, C. et GOLDREICH, P. (1987). Shepherding of the Uranian rings. I - Kinematics. II - Dynamics. *The Astronomical Journal*, 93:724–737.
- PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W. et FLANNERY, B. (2007). *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, 3ème édition.
- RAMBAUX, N., CASTILLO-ROGEZ, J., WILLIAMS, J. et KARATEKIN, Ö. (2010). Librational response of Enceladus. *Geophysical Research Letters*, 37:4202–4207.
- REEH, N., CHRISTENSEN, E., MEYER, C. et OLESEN, O. (2003). Tidal bending of glaciers : A linear viscoelastic approach. *Annals of Glaciology*, 37:83–89.
- ROBUCHON, G., CHOBLET, G., TOBIE, G., ČADEK, O., SOTIN, C. et GRASSET, O. (2010). Coupling of thermal evolution and despinning of early Iapetus. *Icarus*, 207:959–971.
- SAHA, P. et TREMAINE, S. (1992). Symplectic integrators for solar system dynamics. *The Astronomical Journal*, 104:1633–1640.
- SCHUBERT, G., HUSSMANN, H., LAINEY, V. et al. (2010). Evolution of Icy Satellites. *Space Science review*, 153:447–484.
- SCHUBERT, G., TURCOTTE, D. et OLSON, P. (2001). *Mantle convection in the Earth and Planets*. Cambridge University Press, New York, 1ère édition.



- SEIDELMANN, P., ARCHINAL, B., A'HEARN, M. *et al.* (2007). Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements : 2006. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 98:155–180.
- SHOJI, D., HUSSMANN, H., KURITA, K. et SOHL, F. (2013). Ice rheology and tidal heating of Enceladus. *Icarus*, 226:10–19.
- SHOWALTER, M. et LISSAUER, J. (2006). The second ring-moon system of Uranus : Discovery and Dynamics. *Science*, 311:973–977.
- SHOWMAN, A., STEVENSON, D. et MALHOTRA, R. (1997). Coupled Orbital and Thermal Evolution of Ganymede. *Icarus*, 129:367–383.
- SMITH, B., SODERBLOM, L., BEEBE, R. *et al.* (1986). Voyager 2 in the Uranian system - Imaging science results. *Science*, 233:43–64.
- SPENCER, J. R., HOWETT, C. J., VERBISER, A. J., HURFORD, T. A., SEGURA, M. et SPENCER, D. C. (2013). A New Estimate of the Power Emitted by Enceladus' Tiger Stripes. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, volume 45, page 403.03. Bulletin of the American Astronomical Society.
- STIEFEL, E. et SCHEIFELE, G. (1971). *Linear and regular celestial mechanics ; perturbed two-body motion, numerical methods, canonical theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag, 1ère édition.
- STROBELL, M. E. et MASURSKY, H. (1987). New Features Named on the Moon and Uranian Satellites. In *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, volume 18, page 964. Lunar and Planetary Inst. Technical Report.
- THOMAS, P. (1988). Radii, shapes, and topography of the satellites of Uranus from limb coordinates. *Icarus*, 73:427–441.
- TITTEMORE, W. et WISDOM, J. (1988). Tidal Evolution of the Uranian Satellites- I. Passage of Ariel and Umbriel through the 5 : 3 Mean-Motion Commensurability. *Icarus*, 74:172–230.
- TITTEMORE, W. et WISDOM, J. (1989). Tidal Evolution of the Uranian Satellites- II. An Explanation of the Anomalously High Orbital Inclination of Miranda. *Icarus*, 78:63–89.
- TITTEMORE, W. et WISDOM, J. (1990). Tidal Evolution of the Uranian Satellites- III. Evolution through the Miranda-Umbriel 3 : 1, Miranda-Ariel 5 : 3, and Ariel-Umbriel 2 : 1 Mean-Motion Commensurabilities. *Icarus*, 85:394–443.
- TOBIE, G. (2003). *Impact du chauffage de marée sur l'évolution géodynamique d'Europe et de Titan*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, France.

- VALK, S., DELSATE, N., LEMAÎTRE, A. et CARLETTI, T. (2009). Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator. *Advances in Space Research*, 43:1509–1526.
- VIENCE, A. et DURIEZ, L. (1995). TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites. *Astronomy and Astrophysics*, 297:588–605.
- WILLIAMS, J., BOGGS, D., YODER, C., RATCLIFF, J. et DICKEY, J. (2001). Lunar rotational dissipation in solid body and molten core. *Journal of Geophysical Research*, 106:27933–27968.
- WISDOM, J. (1982). The origin of the Kirkwood gaps - A mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. *The Astronomical Journal*, 87:577–593.
- WISDOM, J. (1983). Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap. *Icarus*, 56:51–74.
- WISDOM, J. et HOLMAN, M. (1991). Symplectic Maps for the  $n$ -Body Problem. *The Astronomical Journal*, 102(4):1528–1538.
- YODER, C. et PEALE, S. (1981). The tides of Io. *Icarus*, 47:1–35.

